HOOFDSTUK 3

Lineaire modellen

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

lineaire formules opstellen en grafieken tekenen;
vergelijkingen en ongelijkheden oplossen en modellen vergelijken;
waarden voorspellen en beoordelen of een model bruikbaar is.

Wat weet je nog?

V1 Rekenen en een vergelijking

Deze opgave gebruikt rekenen, eenheden en het oplossen van een eenvoudige vergelijking.

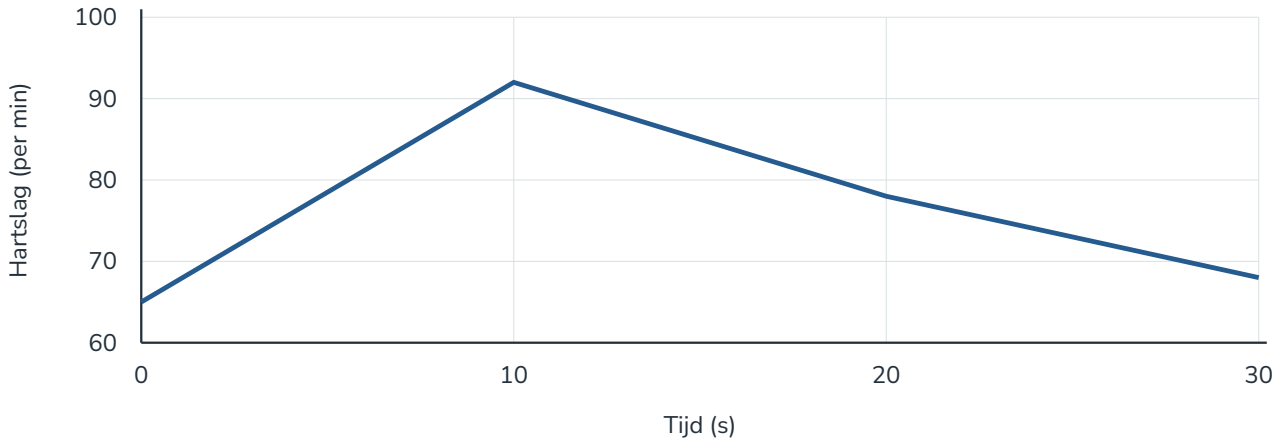
a Een kist bevat 1,8 kg materiaal. Er komt 650 g bij. Hoeveel kilogram materiaal bevat de kist daarna?

b Los de vergelijking $4x + 7 = 31$ op.

V2 Aflezen en omrekenen

De grafiek toont vier voor deze oefening samengestelde hartslagmetingen. De meetpunten zijn verbonden om het verloop zichtbaar te maken.

Hartslagmetingen



a Lees de hartslag na 10 seconden af. Hoeveel slagen per minuut is dit meer dan bij het begin?

Duur (s)
45
120

b Reken de twee tijdsduren uit de tabel om naar minuten.

V3 Balans en terugrekenen

Gebruik de balansmethode die je eerder hebt geleerd. Geef exacte antwoorden.

a Los op: $4x + 7 = 31$.

b Controleer door terugrekenen of $x = 6$ aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet.

V4 Eenvoudige vergelijkingen

Deze opgave gebruikt alleen rekenen en de eerder geleerde balansmethode.

a Los op: $5x = 35$.

b Los op: $24 - 3x = 9$. Controleer je antwoord in deze vergelijking.

V5 Gelijke porties

Twaalf gelijke bekers bevatten samen 1,8 liter water.

a Hoeveel milliliter water zit er in één beker?

b Vijf bekers worden apart gezet. Welk deel van het totale water is dat? Geef ook de hoeveelheid in milliliter.

V6 Een teller vergelijken

Een teller bij een sorteermachine staat om 13.00 uur op 215. Om 13.08 uur staat dezelfde teller op 383. De teller telt gesorteerde voorwerpen.

a Hoeveel voorwerpen zijn in deze acht minuten gesorteerd?

b Hoeveel voorwerpen zijn gemiddeld per minuut gesorteerd?

V7 Een bestelling vergelijken

Een club vergelijkt twee aanbieders van potloodsets. In de tabel staan de totale bedragen, inclusief bezorging. De prijsgegevens zijn samengesteld voor deze oefening.

Aantal sets	P: bedrag (€)	Q: bedrag (€)
10	24	30
20	38	40
30	52	50
40	66	60

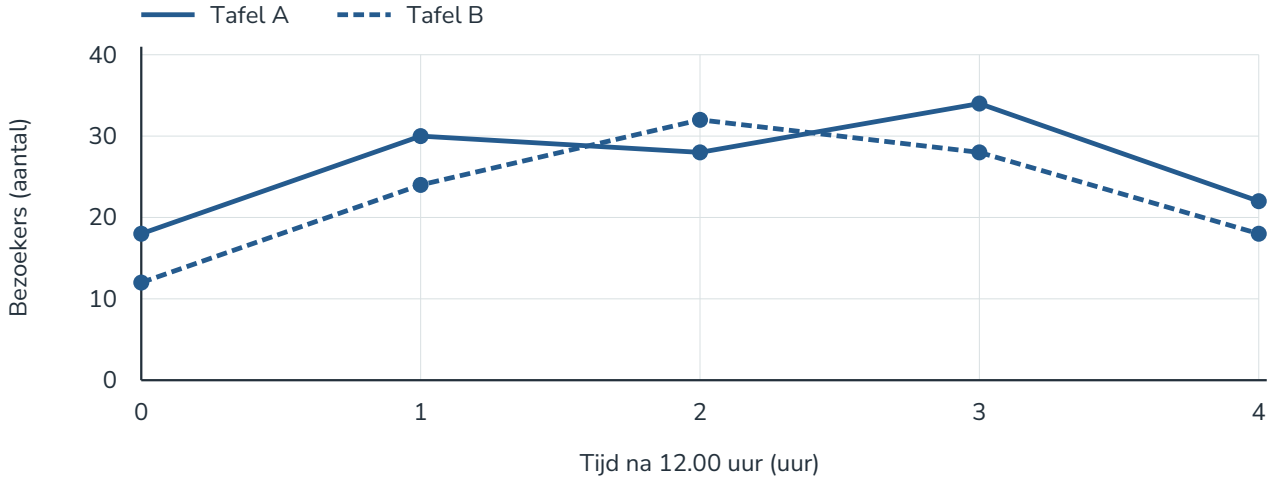
a De club bestelt 20 sets. Welke aanbieder is goedkoper en hoeveel euro scheelt dat?

b Bij 40 sets kiest de club de goedkoopste aanbieder. Hoeveel procent bespaart zij ten opzichte van het bedrag van de andere aanbieder? Rond af op één decimaal.

V8 Een gegeven grafiek lezen

De grafiek toont aantallen bezoekers bij twee leestafels. Er is ieder heel uur geteld; de verbindingsstukken maken de volgorde zichtbaar. De gegevens zijn samengesteld voor deze oefening.

Bezoekers bij twee leestafels



a Bij welke tafel zijn twee uur na 12.00 uur de meeste bezoekers? Hoeveel meer zijn het er?

b Met hoeveel is het aantal bezoekers bij elke tafel veranderd tussen één en drie uur na 12.00 uur?

3.1 Lineaire formules en grafieken

Leerdoel

Ik kan een lineair verband herkennen aan een constante absolute verandering.

Theorie

Een constante verandering herkennen

Een verband is lineair als y bij gelijke stappen in x steeds met hetzelfde bedrag verandert. Met absolute verandering bedoelen we hier het verschil: nieuwe waarde min oude waarde, met het bijbehorende plus- of minteken. Een vaste procentuele verandering is geen vaste absolute verandering. Bij ongelijke stappen vergelijk je de verandering per één eenheid x: deel het verschil in y door het verschil in x.

De grafiek van een lineair model is een rechte lijn. Om een gegeven lineaire formule te tekenen, bereken je twee punten, zet je eerst x horizontaal en y verticaal uit en verbind je de punten met een rechte lijn binnen het modeldomein. Exact passende tabelwaarden ondersteunen een lineair model; uit enkele metingen alleen volgt geen garantie voor alle tussenliggende of latere waarden.

Zie voorbeeld 3.1A, blz. 303.

Onthoud: vergelijk absolute veranderingen bij gelijke stappen.

1 Een proeflift

Een proeflift beweegt omhoog. De volgende metingen zijn samengesteld voor deze oefening. t is de tijd in minuten na het begin; H is de hoogte boven de vloer in centimeter. Voor de oefening geldt het model alleen voor $0 \le t \le 5$.

t (min)	H (cm)
0	18
1	24
2	30
3	36

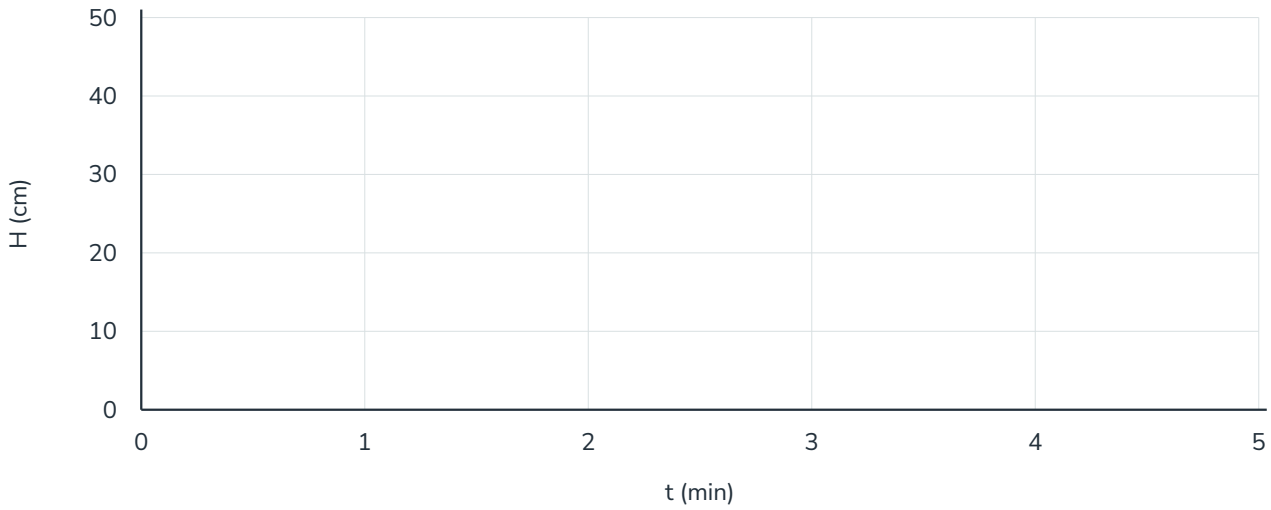
a Vergelijk telkens twee opeenvolgende tabelrijen. Met hoeveel verandert H in één minuut? Leg daarna uit waarom de tabel past bij een lineair verband.

1 Een proeflift (vervolg)

Een proeflift beweegt omhoog. De volgende metingen zijn samengesteld voor deze oefening. t is de tijd in minuten na het begin; H is de hoogte boven de vloer in centimeter. Voor de oefening geldt het model alleen voor $0 \leq t \leq 5$.

t (min)	H (cm)
0	18
1	24
2	30
3	36

Teken de grafiek van H



b Het model is $H = 6t + 18$. Bereken eerst H bij $t = 0$ en $t = 5$. Zet die twee punten in het raster en teken de modelgrafiek voor $0 \leq t \leq 5$.

2 Ongelijke meettijden

Bij een verwarmingsproef zijn de onderstaande waarden samengesteld. t is de tijd in uren na het begin en T is de temperatuur in °C.

t (uur)	T (°C)
0	11
2	17
5	26
9	38

a Past de tabel bij een lineair verband? Onderbouw je antwoord met de veranderingen tussen alle opeenvolgende meetmomenten.

3 Filterlagen

In een proefopstelling worden filterlagen voor een lamp geplaatst. De samengestelde tabel geeft de gemeten lichtsterkte als percentage van de lichtsterkte zonder filter.

Aantal lagen	Lichtsterkte (%)
0	100
1	90
2	81
3	72,9
4	65,61

a Is het verband tussen het aantal filterlagen en de lichtsterkte volgens deze tabel lineair? Onderbouw je antwoord.

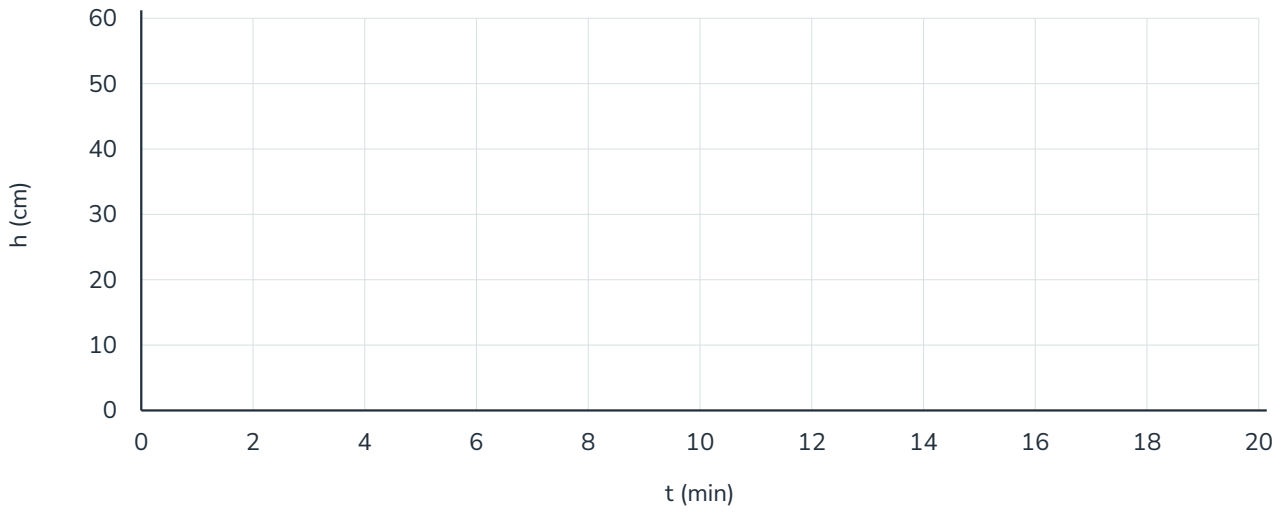
4 Een demonstratietank

Een demonstratietank wordt geleegd. Een medewerker wil plannen wanneer de waterhoogte laag genoeg is voor een volgende proef. De tabel bevat voor deze oefening samengestelde metingen. t is de tijd in minuten na het openen van de afvoer en h is de waterhoogte in centimeter. Als de tabel bij een lineair verband past, gebruiken we dat model voor $0 \leq t \leq 20$.

t (min)	h (cm)
0	54
4	46
8	38
12	30

a Beoordeel of een lineair model past bij de tabel. Onderbouw je oordeel.

Teken het hoogtemodel



b Stel een formule voor h op en teken de modelgrafiek voor het afgesproken domein in het raster.

c Voor de volgende proef moet de waterhoogte maximaal 20 cm zijn. Vanaf welk tijdstip kan de medewerker binnen het modeldomein beginnen? Geef een exact antwoord.

Helling en beginwaarde bepalen

Leerdoel

Ik kan helling en beginwaarde berekenen uit twee punten, een tabel of een tekst.

Theorie

Helling en beginwaarde bepalen

In een lineaire formule $y = ax + b$ is a de helling. Uit twee verschillende x-waarden bereken je $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Gebruik het verschil in y en het bijbehorende verschil in x in dezelfde volgorde. De eenheid van a is de eenheid van y per eenheid x. Een negatieve a betekent dat y afneemt als x toeneemt.

De beginwaarde b is de waarde bij $x = 0$. Na het bepalen van a reken je vanuit een bekend punt terug: $b = y - ax$. De eerste waarde in een tabel is alleen de beginwaarde als die bij $x = 0$ hoort. Ook als $x = 0$ buiten een grafiekvenster ligt, kun je b uit de lineaire formule berekenen. Of die modelwaarde een echte situatie beschrijft, hangt af van het domein en de aannames.

Zie voorbeeld 3.1A, blz. 303.

Onthoud: de beginwaarde hoort bij $x = 0$.

5 Een warmtekast

Tijdens een proef met een warmtekast wordt de temperatuur T in °C gemodelleerd als lineair in de tijd t in minuten. De samengestelde meetgegevens zijn: bij $t = 4$ is $T = 46$ en bij $t = 10$ is $T = 82$. Het model geldt van $t = 0$ tot $t = 10$.

a Bereken eerst de toename van de temperatuur en de verstreken tijd tussen de metingen. Deel daarna de temperatuurtoename door de tijdstoename. Wat is de helling met de juiste eenheid?

b Reken vanaf de meting bij $t = 4$ terug naar $t = 0$. Wat is de beginwaarde?

6 Een bakje capsules

Een weegschaal meet de totale massa m in gram van een bakje met n identieke capsules. De meetgegevens zijn samengesteld voor deze oefening: 18 capsules geven 64 g en 42 capsules geven 136 g. Het verband is lineair voor gehele aantallen 0 tot en met 60.

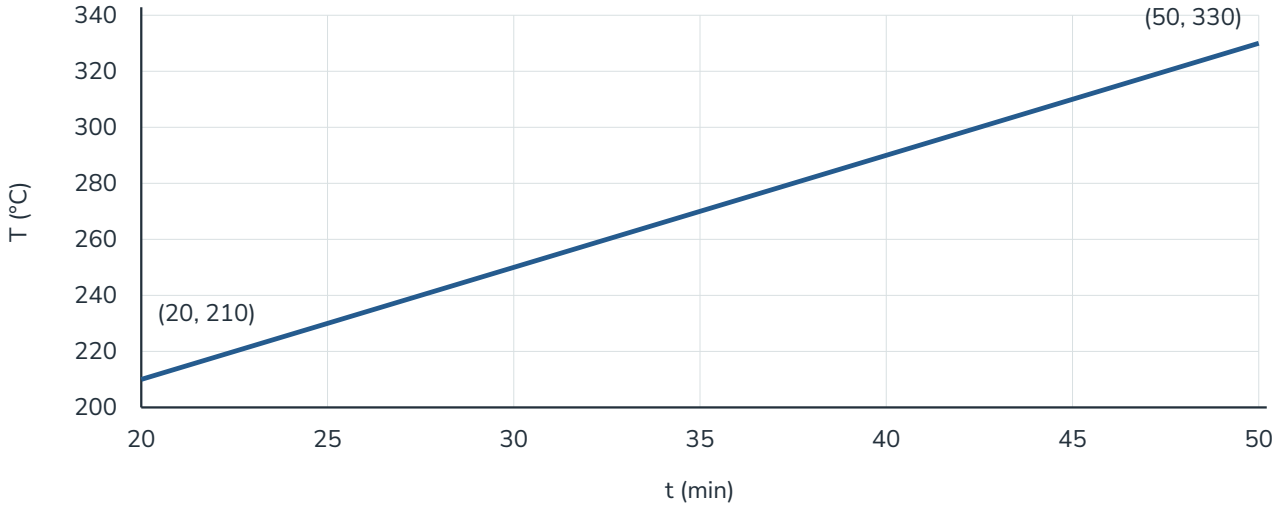
a Bereken de helling van dit verband met de juiste eenheid.

b Bereken de beginwaarde en beschrijf wat die waarde hier voorstelt.

7 Een beperkt grafiekvenster

De grafiek toont een deel van een lineair temperatuurmodel van een oven. t is de tijd in minuten na het begin en T is de temperatuur in °C. De aangeduide punten (20, 210) en (50, 330) zijn exact. De gegevens zijn samengesteld voor deze oefening. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 50$, maar $t = 0$ staat niet in het venster.

Weergegeven deel van het model



a Bereken de helling en de beginwaarde van het model met de juiste eenheden.

8 Een testkar en een meetvak

Een testkar rijdt met constante snelheid over een rechte rail. Zijn positie s wordt gemeten in meter vanaf het begin van de rail; t is de tijd in minuten na het starten van de klok. De samengestelde metingen zijn s = 42 bij t = 6 en s = 114 bij t = 18. Het lineaire model geldt voor $0 \leq t \leq 20$. Het meetvak omvat posities van 0 tot en met 125 m.

a Bepaal de snelheid en de positie van de kar op het moment dat de klok startte. Geef eenheden.

b Een medewerker wil de positie bij t = 20 nog in het meetvak meten. Kan dat volgens het model? Onderbouw je beslissing met een berekening.

9 Een formule met twee fouten

Een printer verwerkt een doorlopende papierstrook. t is de tijd in minuten na het starten van de klok en F is de tot dan toe verwerkte lengte in meter. De samengestelde tabel hoort bij een lineair model voor $0 \leq t \leq 9$. Elin schrijft: “Van 30 naar 42 is een toename van 12. De helling is dus 12 en de beginwaarde is 30. Daarom is F = 12t + 30.”

t (min)	F (m)
2	30
5	42
9	58

a Beschrijf en herstel de twee fouten in Elins redenering.

b Schrijf de juiste formule op en leg de betekenis van de beginwaarde in deze situatie uit.

Een formule met betekenis

Leerdoel

Ik kan een lineaire formule opstellen en de parameters met hun eenheden interpreteren.

Theorie

Een formule met betekenis

Een lineair model heeft de vorm y = ax + b. Kies eerst welke grootheid x is en welke grootheid y is. Neem voor a de verandering van y per één eenheid x en voor b de modelwaarde van y bij x = 0. Geef ook aan voor welke waarden van x het model bedoeld is. Een vaste hoeveelheid plus een bedrag per eenheid levert bijvoorbeeld deze vorm op.

Interpreteer beide parameters met eenheden: a heeft de eenheid van y per eenheid x; b heeft dezelfde eenheid als y. Bij een dalend verband is a negatief. Als b = 0, is y = ax recht evenredig en gaat de grafiek door de oorsprong. Een beginwaarde buiten het gebruiksdomein kan een vaste bijdrage voorstellen zonder dat x = 0 een toegestane praktijksituatie is.

Zie voorbeeld 3.1A, blz. 303.

Onthoud: schrijf bij a en b wat het getal in de situatie betekent.

10 Een bestelling sleutelhangers

Een atelier gebruikt voor een bestelling het volgende rekenmodel: een vast bedrag van € 12 en € 2,50 per sleutelhanger. n is het aantal sleutelhangers en K is het totale bedrag in euro. De bedragen zijn samengesteld voor deze oefening. Het model geldt voor gehele aantallen van 0 tot en met 100.

a Welk bedrag hangt af van n en welk bedrag blijft vast? Gebruik die twee onderdelen om een formule voor K op te stellen.

b Beschrijf de betekenis van 2,50 en 12 in je formule. Geef bij beide getallen de eenheid.

11 Een kabelrol

Een kabelrol bevat bij het begin 96 m kabel. Tijdens een proef wordt gelijkmatig 8 m per uur van de rol afgewikkeld. R is de resterende kabellengte in meter en t is de tijd in uren sinds het begin. Deze gegevens vormen een samengesteld oefenmodel voor $0 \leq t \leq 10$.

a Stel de formule voor R op.

b Beschrijf de betekenis van beide parameters, inclusief hun eenheden. Verklaar het teken van de helling.

12 Twee ritmodellen

Een vervoersdienst gebruikt twee rekenmodellen voor ritten van maximaal 40 km. In beide formules is d de afstand in kilometer en zijn de kosten in euro. Zonder reservering is $C = 0{,}65d$. Met reservering is $D = 0{,}65d + 6$. De bedragen zijn samengesteld voor deze oefening.

a Welk van de twee modellen is recht evenredig? Onderbouw je keuze.

b Beschrijf de betekenis van 0,65 en 6 in het model voor D, met eenheden.

13 Een repetitiestudio boeken

Een repetitiestudio rekent € 32 per boeking plus € 18 per uur gebruik. Delen van een uur worden naar verhouding berekend. Een boeking duurt minimaal 0,5 en maximaal 6 uur. t is de duur in uren en K is het totaalbedrag in euro. De bedragen zijn samengesteld voor deze oefening; er zijn geen andere kosten.

a Stel een kostenformule op voor een geldige boeking. Beschrijf de betekenis van beide parameters met hun eenheden.

b Voor 2,5 uur staat € 80 op een voorlopige rekening. Is dat bedrag volgens het model juist? Geef bij een fout het juiste bedrag.

c Een groep heeft € 86 beschikbaar. Hoelang kan de groep maximaal boeken? Geef een exact antwoord in uren.

Van formule naar grafiek en antwoord

Leerdoel

Ik kan bij een lineaire formule een grafiek tekenen en relevante waarden berekenen.

Theorie

Van formule naar grafiek en antwoord

Noteer op beide assen de grootheden en hun eenheden. Gebruik de aangegeven schaal. Voor een lineaire formule zijn twee punten voldoende: kies bijvoorbeeld de twee uiteinden van het modeldomein, bereken hun y-waarden en teken het rechte lijnstuk tussen de punten. Is alleen een deel van het domein zichtbaar, dan teken je het deel binnen dat venster.

Voor een gegeven x bereken je y door x in de formule in te vullen. Is juist een waarde van y gevraagd, dan stel je de formule gelijk aan die waarde en los je de vergelijking op. Controleer je uitkomst in de formule en in het modeldomein. Een berekend antwoord is nauwkeuriger dan alleen aflezen; rond alleen af als de vraag dat verlangt.

Zie voorbeeld 3.1B, blz. 305.

Onthoud: controleer je antwoord ook op het modeldomein.

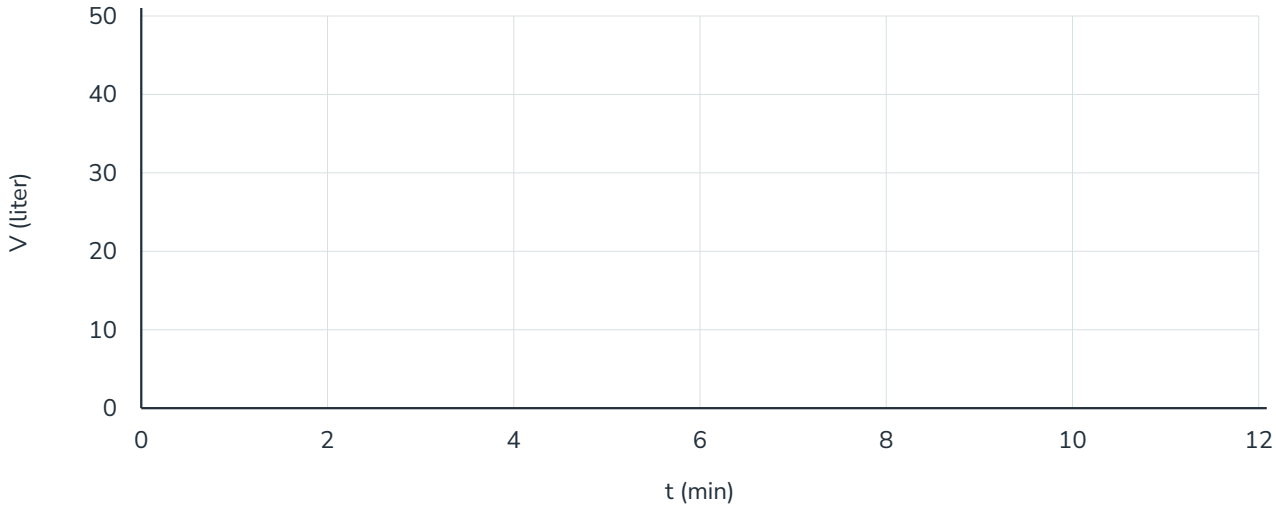
14 Een pomp in een proefopstelling

Voor een pomp wordt het model $V = 48 - 3t$ gebruikt. V is de hoeveelheid water in liter en t is de tijd in minuten na het inschakelen. Het model is samengesteld voor deze oefening en geldt voor $0 \leq t \leq 12$.

a Bereken V bij $t = 0$, $t = 4$, $t = 8$ en $t = 12$ en maak hiervan een tabel.

14 Een pomp in een proefopstelling (vervolg)

Teken de grafiek van V

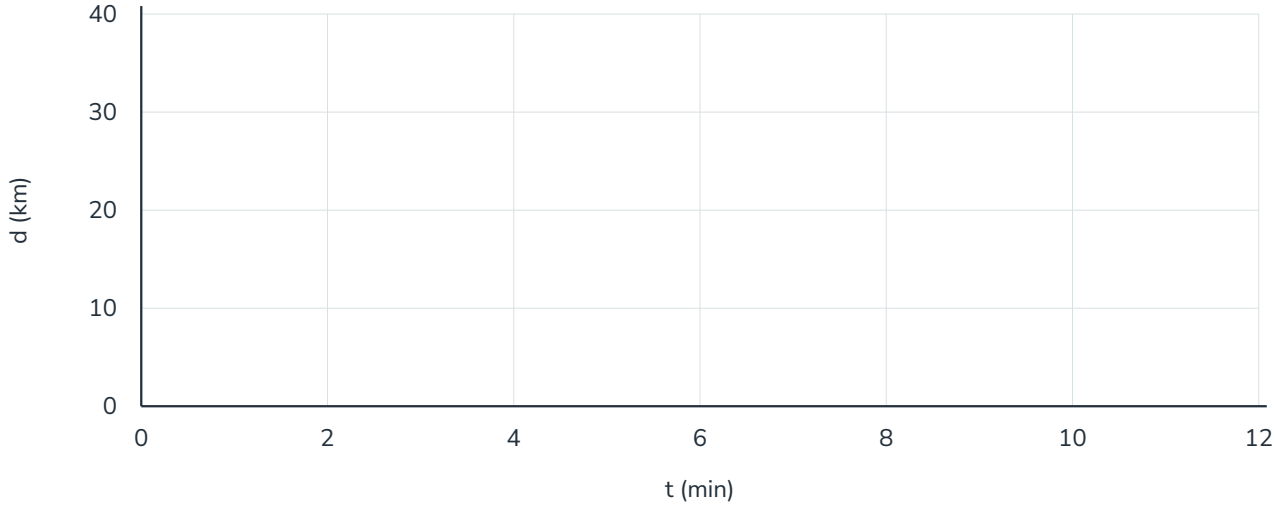


b Gebruik je tabel om de modelgrafiek te tekenen. Zet de berekende punten in het raster en teken één rechte lijn door die punten voor het gegeven domein.

15 Een testtrein

Voor een testtrein geldt het samengestelde model $d = 14 + 2t$. d is de positie langs een spoor in kilometer vanaf een vast nulpunt, en t is de tijd in minuten na het begin van de test. Gebruik het model alleen voor $0 \leq t \leq 12$.

Teken de grafiek van d



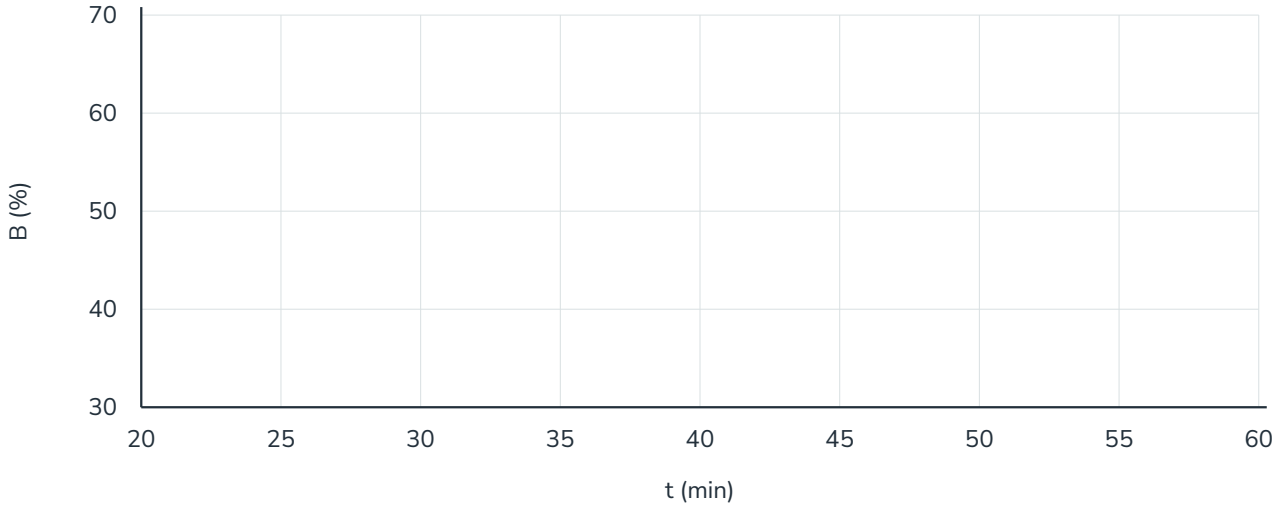
a Teken de modelgrafiek in het raster voor het gegeven domein.

b Na hoeveel minuten bereikt de trein de positie van 30 km? Geef een exact antwoord.

16 Een batterijdisplay

Voor een demonstratiedisplay is het model B = 81 − 0,75t samengesteld. B is de aangegeven batterijstand in procent en t is de tijd in minuten na het inschakelen. Het model geldt voor 0 ≤ t ≤ 60. Op het scherm wordt alleen het tijdvenster van 20 tot en met 60 minuten weergegeven.

Teken het zichtbare modeldeel



a Teken het deel van de modelgrafiek dat in het schermvenster zichtbaar is.

b Het display geeft een melding zodra de batterijstand 45% bereikt. Na hoeveel minuten gebeurt dat volgens het model? Geef een exact antwoord.

17 Zelftest: herkennen en formuleren

De twee vragen hieronder gaan over onafhankelijke situaties. Geef je berekeningen en je conclusie.

x	y
0	9
4	15
8	22
12	30

a De tabel bevat samengestelde waarden voor x en y. Is het verband volgens deze tabel lineair? Onderbouw je antwoord.

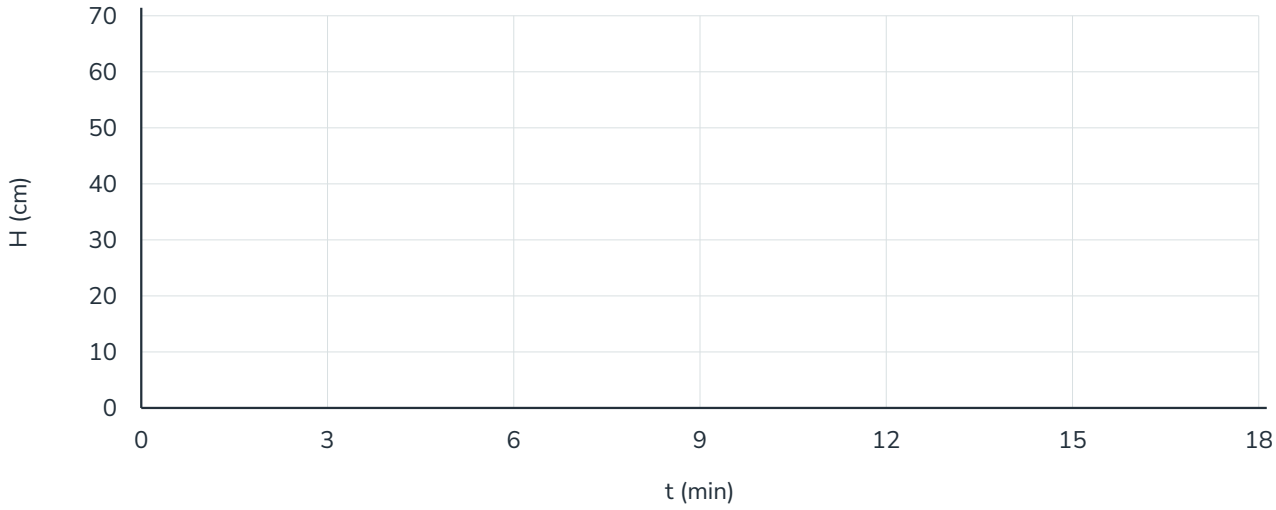
b Een workshop rekent een vast reserveringsbedrag van € 7 plus € 2,40 per deelnemer. De bedragen zijn samengesteld voor deze oefening. Er zijn geen andere kosten. n is het gehele aantal deelnemers, van 0 tot en met 25, en K is het totaalbedrag in euro. Stel een formule voor K op en beschrijf de betekenis van beide parameters met hun eenheden.

18 Zelftest: parameters en grafiek

Vraag a gaat over een temperatuurmodel. Vragen b en c gaan over een ander model. Alle modellen zijn samengesteld voor deze oefening. Geef je berekeningen en je conclusies.

a Een lineair temperatuurmodel heeft T = 37 °C bij t = 5 minuten en T = 77 °C bij t = 13 minuten. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 15$. Bereken de helling en de beginwaarde met hun eenheden.

Teken de grafiek van H



b Een platform zakt volgens H = 63 − 3t. H is de hoogte in centimeter en t is de tijd in minuten. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 18$. Teken de modelgrafiek in het raster.

c Na hoeveel minuten is het platform volgens dit model op 24 cm hoogte? Geef een exact antwoord.

3.2 Snijpunten, vergelijkingen en ongelijkheden

Leerdoel

Ik kan een lineaire vergelijking opstellen en oplossen bij een context.

Theorie

Een gelijkheid omzetten in een vergelijking

Kies eerst een letter voor de onbekende en vermeld de eenheid. Beschrijf met die letter de gevraagde hoeveelheid. Als twee bedragen of andere uitkomsten gelijk moeten zijn, verbind je de uitdrukkingen met =. Los de vergelijking op met de balansmethode: voer aan beide kanten dezelfde bewerking uit. Leg daarna uit wat de uitkomst in de situatie betekent. Een oplossing moet ook in het modeldomein passen: een aantal personen is bijvoorbeeld geheel en niet negatief.

Zie voorbeeld 3.2A, blz. 308.

Onthoud: Een gevonden getal is pas bruikbaar als het ook aan de contextvoorwaarden voldoet.

1 Lunchpakketten voor een repetitie

Een toneelgroep betaalt € 180 voor het gebruik van de repetitieruimte en € 12 per lunchpakket. Er zijn maximaal 60 lunchpakketten mogelijk. De totale rekening is € 660. Het aantal n is een geheel getal van 0 tot en met 60. Er zijn geen andere kosten.

a Kies n voor het aantal lunchpakketten. Schrijf de vergelijking die bij de rekening hoort.

b Los je vergelijking op. Trek eerst de vaste kosten van beide kanten af.

c Controleer de oplossing in de oorspronkelijke rekening en geef de betekenis van je controle.

2 Materialen voor een workshop

Voor een workshop zijn de kosten $K = 45 + 7m$. K is het totale bedrag in euro en m is het aantal materiaalsets. Er zijn maximaal 30 sets, m is geheel en $0 \leq m \leq 30$. De organisator betaalt precies € 178; andere kosten zijn er niet.

a Bepaal het aantal materiaalsets en toon aan dat dit aantal de rekening verklaart.

3 Porties uit een voorraad

Een cateraar begint met 480 gram van een ingrediënt. Per afgemaakte portie wordt 25 gram gebruikt. De resterende massa is $M = 480 - 25b$, met M in gram en b het gehele aantal porties. Er kunnen maximaal 19 porties worden gemaakt. Andere verliezen worden verwaarloosd.

a Na hoeveel porties is precies 205 gram over? Onderbouw je antwoord.

4 Een onleesbare factuur

Een maker rekent € 64 voorbereidingskosten en € 8,50 per houten informatiebordje. Op een factuur staat een totaal van € 217, maar het aantal bordjes is onleesbaar. Een bestelling kan 0 tot en met 40 hele bordjes bevatten. De bedragen zijn inclusief alle kosten.

a Achterhaal hoeveel bordjes bij deze factuur horen. Laat je redenering zien.

b De boekhouder wil de herstelde factuur kunnen verantwoorden. Geef een controle van het gevonden aantal met de oorspronkelijke factuurgegevens.

5 Een onbekend verbruik

Een apparaat heeft bij de start een accustand van 97%. Tijdens een vaste werkstand daalt die stand volgens $S = 97 - rt$. S is de stand in procenten, t de tijd in minuten en r een constante afname in procentpunten per minuut. Voor deze oefening zijn fictieve meetgegevens samengesteld: na 35 minuten is de stand 62%. Gebruik het model alleen voor $0 \leq t \leq 60$; overige invloeden worden verwaarloosd.

a Bepaal de waarde van r met bijbehorende eenheid.

b Na hoeveel minuten voorspelt dit model een stand van 52%? Controleer de voorspelling.

De twee coördinaten van een snijpunt

Leerdoel

Ik kan de coördinaten van een snijpunt van twee lijnen berekenen en in de context interpreteren.

Theorie

De twee coördinaten van een snijpunt

In een snijpunt hebben twee modellen bij dezelfde invoer dezelfde uitkomst. Stel hun uitdrukkingen gelijk en bereken eerst de horizontale coördinaat. Vul die waarde daarna in een model in om de verticale coördinaat te berekenen. Controleer beide modellen en geef beide eenheden en betekenissen. Het punt moet in het gemeenschappelijke domein liggen. Als gelijkstellen een onmogelijke gelijkheid oplevert, zoals 2 = 5, is er geen snijpunt. Gelijke hellingen met verschillende beginwaarden geven evenwijdige lijnen. Leveren twee modellen na vereenvoudigen dezelfde formule, dan vallen de lijnen samen: elk punt van hun gemeenschappelijke domein is gemeenschappelijk.

Zie voorbeeld 3.2A, blz. 308.

Onthoud: Een snijpunt bevat een invoer én een gemeenschappelijke uitkomst.

6 Twee huurmodellen

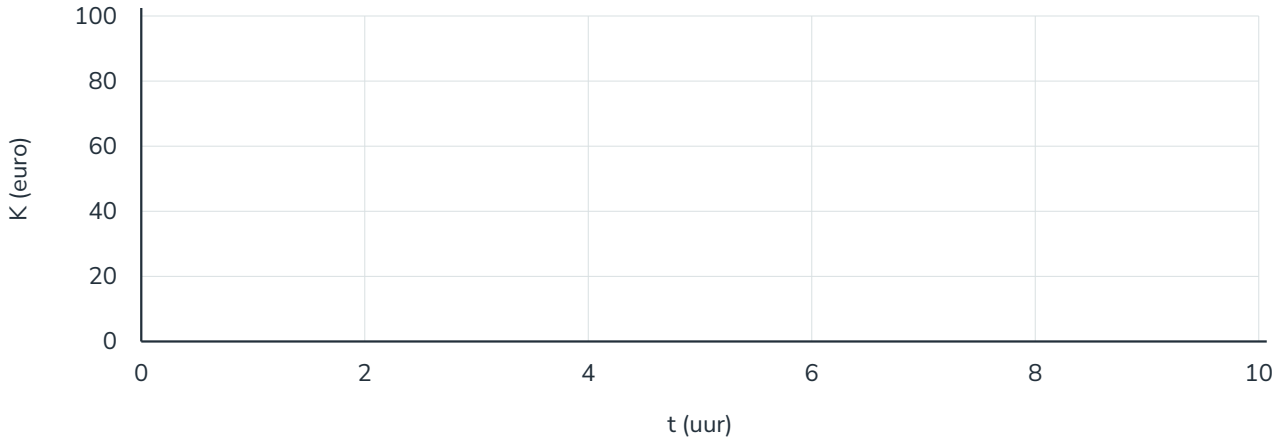
Voor een transportaanhanger gelden twee fictieve huurmodellen: A = 28 + 6t en B = 10 + 9t. A en B zijn de kosten in euro, t is de huurduur in uur. Gebruik 0 ≤ t ≤ 10. De huurduur mag elk reëel getal in dit interval zijn; beide modellen kennen dezelfde voorwaarden en er zijn geen andere kosten.

a In het snijpunt zijn de kosten gelijk. Stel A = B en bereken de huurduur.

b Bereken bij deze huurduur de kosten en noteer beide coördinaten van het snijpunt.

6 Twee huurmodellen (vervolg)

Huurkosten



c Teken beide modellen in het raster. Gebruik voor elke lijn twee punten en controleer of het berekende snijpunt op beide lijnen ligt.

7 Twee temperatuurmodellen

Voor een oefenproef zijn fictieve meetgegevens samengesteld. De bijbehorende modellen zijn $T_A = 18 + 2t$ en $T_B = 42 - t$. De temperaturen zijn in °C en t is de tijd in minuten. Gebruik alleen $0 \leq t \leq 12$. Beide veranderingen worden in dit interval constant verondersteld.

a Bereken het snijpunt van de twee modellen en leg beide coördinaten uit in de proef.

8 Geen of juist heel veel snijpunten

In deze opgave hebben x en de uitkomsten geen eenheid. Gebruik bij elk model $0 \leq x \leq 3$. Geef exacte antwoorden.

a De modellen zijn $A = 8 + 3x$ en $B = 14 + 3x$. Onderzoek of er een snijpunt is en verklaar je uitkomst.

b De modellen zijn $C = 6 - 2x$ en $D = 2(3 - x)$. Onderzoek welke punten op beide lijnen liggen.

9 Twee voorraadtanks

Een installatie heeft twee tanks van elk 100 liter. Bij de start zit in tank P 24 liter en in tank Q 84 liter. P krijgt voortdurend 3 liter per minuut erbij; Q verliest voortdurend 2 liter per minuut. Beschouw de eerste 20 minuten, waarbij t elk reëel getal tussen 0 en 20 mag zijn. De debieten blijven constant; er zijn geen andere in- of uitstromen.

a Op welk moment bevatten de tanks evenveel water en hoeveel liter is dat? Onderbouw de beslissing met berekeningen en controleer of ze binnen de modelvoorwaarden past.

Welke waarden voldoen aan een voorwaarde?

Leerdoel

Ik kan een lineaire ongelijkheid oplossen en de oplossingswaarden in de context aangeven.

Theorie

Welke waarden voldoen aan een voorwaarde?

Vertaal de voorwaarde zorgvuldig: meer dan geeft >, minder dan geeft <, minstens geeft ≥ en hoogstens geeft ≤. Los daarna de lineaire ongelijkheid op. Optellen of aftrekken aan beide kanten verandert de richting niet. Vermenigvuldigen of delen door een negatief getal keert het teken om. Combineer de algebraïsche uitkomst met het domein. Bij een geheel aantal kies je alleen de gehele waarden die echt voldoen. Rond een grens daarom niet automatisch af op de dichtstbijzijnde hele waarde. Bij een strikt teken is de grens zelf uitgesloten; bij ≥ of ≤ is gelijkheid toegestaan.

Zie voorbeeld 3.2B, blz. 311.

Onthoud: Bij delen door een negatief getal draait het ongelijkheidsteken om.

10 Water bij de start van een demonstratie

Bij een demonstratie wordt water afgevoerd. Het gekozen model is $V = 90 - 6u$, met V in liter en u in minuten. Er wordt alleen aan het einde van volledige minuten gemeten: u is een geheel getal van 0 tot en met 15. Voor het volgende onderdeel moet er minstens 42 liter over zijn. De afvoer blijft volgens het model constant.

a Schrijf een ongelijkheid voor minstens 42 liter.

b Los de ongelijkheid op. Leg uit wat er met het teken gebeurt wanneer je door −6 deelt.

c Geef alle toegestane meetmomenten. Controleer het laatste toegestane moment en het volgende moment.

11 Een stapel controlekaarten

Een team heeft 76 controlekaarten. Volgens het model blijven er $B = 76 - 4k$ ongecontroleerde kaarten over na k volledig afgeronde werkrondes. Er zijn maximaal 19 rondes; k is geheel en $0 \leq k \leq 19$. Het team mag opruimen zodra er minder dan 20 ongecontroleerde kaarten over zijn.

a Los de voorwaarde voor opruimen algebraïsch op.

b Vanaf welke volledige ronde mag het team opruimen? Geef ook alle bruikbare aantallen rondes en controleer de grens.

12 Een bewegend punt in een animatie

In een animatie is de afstand van een punt tot het nulpunt $D = 52 - 2{,}5t$. D is in centimeter en t in seconden, met $0 \leq t \leq 20$. Het punt bevindt zich in de gemarkeerde zone als $D > 15$. De beweging wordt in dit interval als gelijkmatig beschouwd.

a Bepaal precies tijdens welk tijdsinterval het punt in de gemarkeerde zone is.

b Er wordt een schermopname gemaakt bij $t = 0$ en daarna elke 0,1 seconde. Wat is het laatste opnametijdstip waarop het punt in de zone is? Controleer dat tijdstip en het volgende.

13 Bestellen met een reserve

Een vereniging heeft € 200. Voor een bestelling rekent de drukker € 38 voorbereiding en € 6 per katern. Er moeten minstens € 20 van het geld overblijven voor vervoer. De drukker kan maximaal 40 hele katernen leveren; alle vermelde kosten zijn inbegrepen.

a Bepaal het grootste aantal katernen dat de vereniging kan bestellen. Toon ook aan dat één katern meer niet aan de reservevoorwaarde voldoet.

14 Volledige uren in een studio

Een studio verhuurt een ruimte per volledig uur, voor minstens 2 en hoogstens 12 uur. Keuze F kost € 85 vast en € 9 per uur. Keuze G kost € 145 vast en € 3 per uur. De voorzieningen zijn gelijk; er zijn geen bijkomende kosten.

a Voor welke toegestane huurperioden is F strikt goedkoper dan G? Geef alle hele aantallen uren en licht de grens toe.

Controleren met de oorspronkelijke gegevens

Leerdoel

Ik kan een algebraïsche oplossing controleren met substitutie of een grafiek.

Theorie

Controleren met de oorspronkelijke gegevens

Bij substitutie vul je de gevonden waarde in de oorspronkelijke formule of vergelijking in. Bij een snijpunt moeten beide modellen dezelfde tweede coördinaat geven. Controleer ook de eenheden en het domein. Bij een ongelijkheid kun je de grens en een waarde aan elke kant onderzoeken; dit helpt vooral bij een negatieve deler of een strikte grens. De algebra bepaalt de volledige oplossingsverzameling. Een grafische controle gebruikt dezelfde variabele op de horizontale as en dezelfde uitkomst op de verticale as. Teken elk lineair model met twee berekende punten binnen het domein of voer de modellen in een GR in. Het snijpunt en de ligging van de lijnen moeten passen bij je berekening. Een afgelezen waarde kan afgerond zijn; substitutie geeft een exacte controle.

Zie voorbeeld 3.2A, blz. 308 en voorbeeld 3.2B, blz. 311.

Onthoud: Controleer in de oorspronkelijke gegevens, niet alleen in je laatste rekenregel.

15 Een voorgesteld snijpunt

Bij twee rekenmodellen horen de lijnen $P = 5 + 2x$ en $Q = 17 - x$, voor $0 \leq x \leq 10$. x en de modeluitkomsten hebben hier geen eenheid. Een leerling stelt dat het snijpunt (4; 4) is.

a Vul $x = 4$ in beide modellen in. Is de eerste coördinaat van het voorstel goed?

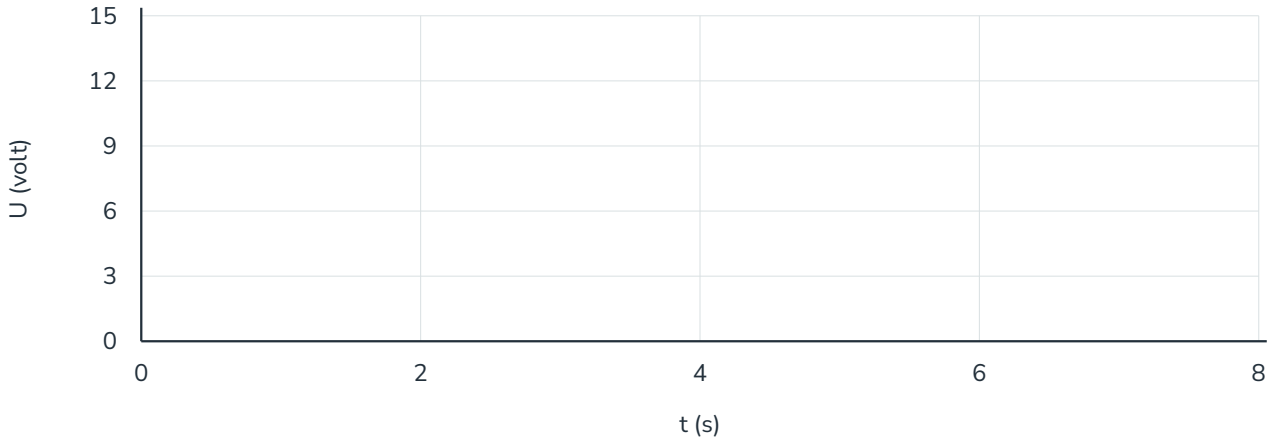
b Beoordeel het hele voorstel en verbeter het zo nodig. Benoem welke informatie een controle van alleen x mist.

16 Controle van een modelantwoord

Voor deze oefening zijn fictieve sensormetingen samengesteld. De gekozen modellen zijn S = 3 + 1,5t en R = 15 − 1,5t, met de spanning in volt en t in seconden. Het modeldomein is 0 ≤ t ≤ 8; t mag elk reëel getal in dit interval zijn. Een meetverslag noemt als snijpunt (4; 9).

a Controleer het genoemde snijpunt met de modelgegevens. Betrek beide coördinaten en het domein in je oordeel.

Sensormodellen



b Teken beide modelgrafieken in het raster en geef aan wat de grafiek over het genoemde snijpunt laat zien.

17 Twee controles die iets missen

Hieronder staan berekeningen bij twee verschillende modellen. Onderzoek elke berekening afzonderlijk; de gegevens en domeinen staan in de vragen.

a Een vat heeft V = 84 − 7t liter, met t een geheel aantal minuten van 0 tot en met 12. Er moet minder dan 35 liter over zijn. Een leerling schrijft: 84 − 7t < 35, dus −7t < −49, dus t < 7. Benoem de eerste fout, verbeter de uitkomst en controleer de contextgrens.

b Voor lijnen y = 2x + 8 en y = 5x − 7, met 0 ≤ x ≤ 10 en zonder eenheden, vindt een leerling x = 5 en noteert het snijpunt (5; 5). Onderzoek en verbeter deze conclusie.

18 Een verzending

Een koerier rekent € 27 voorrijkosten en € 4,50 per pakket. Er kunnen 0 tot en met 30 hele pakketten tegelijk worden verzonden. Alle kosten zijn inbegrepen.

a Een factuur bedraagt € 81. Hoeveel pakketten zijn verzonden? Geef je berekening en antwoord in de context.

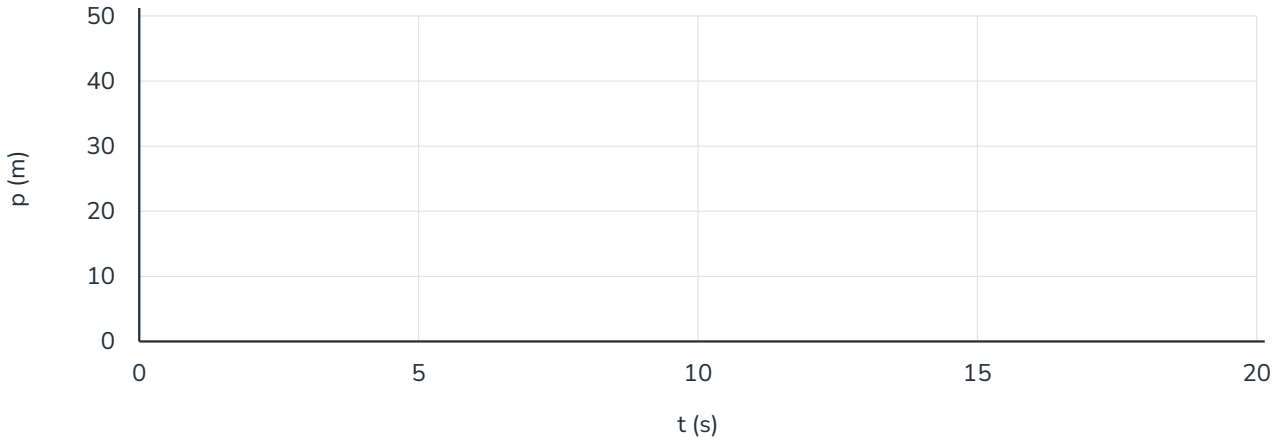
b Een andere factuur noemt 16 pakketten en een totaal van € 99. Beoordeel met een berekening of die factuur klopt.

19 Robots op een rail

Twee robots bewegen op dezelfde rechte rail. Hun posities zijn $p_P = 5 + 2t$ en $p_Q = 35 - t$, met de positie in meter vanaf hetzelfde nulpunt en t in seconden. De modellen gelden voor $0 \leq t \leq 20$. De robots behouden gedurende dit interval hun snelheid; t mag elke reële waarde in het domein zijn.

a Bereken het snijpunt en geef de betekenis van beide coördinaten.

Posities op een rail



b Teken beide modellen in het raster en beoordeel met je grafiek het antwoord bij a.

20 Energiepunten in een spel

Een spel begint met 132 energiepunten. Na elke voltooide opdracht gaan er 5 punten af. Er kunnen maximaal 26 opdrachten worden voltooid. Een bonus blijft beschikbaar zolang er meer dan 47 energiepunten over zijn. Het aantal voltooide opdrachten is een geheel getal, beginnend bij 0.

a Na welke aantallen voltooide opdrachten blijft de bonus beschikbaar? Geef de volledige verzameling bruikbare aantallen en verantwoord de grens.

3.3 Interpoleren en extrapoleren

Leerdoel

Ik kan een onbekende waarde tussen twee gegevenspunten berekenen met lineaire interpolatie.

Theorie

Een waarde tussen twee gegevens

Lineaire interpolatie Bij interpoleren ligt de gevraagde invoerwaarde tussen twee gegeven invoerwaarden. Bij lineaire interpolatie kies je de rechte lijn door de twee gegevenspunten. Bereken de gemiddelde verandering $r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Vanaf een bekend punt geldt $y = y_1 + r \times (x - x_1)$. Gebruik dus de afstand $x - x_1$ tot dat bekende punt. Vermeld bij r de eenheid van y per eenheid van x. Soms is juist y gegeven en moet je de bijbehorende x berekenen.

De voorwaarde voor de schatting De rechte lijn veronderstelt dat de verandering per eenheid overal in het gebruikte interval gelijk is en dat de omstandigheden niet veranderen. Twee meetpunten bewijzen dat niet. Een berekende tussenwaarde is een modelvoorspelling, geen nieuwe meting. Afgeronde meetwaarden en meetonzekerheid beperken de nauwkeurigheid. Een extra meting in het interval kan laten zien hoe goed de gekozen lijn past.

Zie voorbeeld 3.3A, blz. 313.

Onthoud: Gebruik de afstand tot de waarde waarmee je begint.

1 Een schuifdoseerder

Bij een proefopstelling hoort bij schuifpositie x een dosis D vloeistof. De onderstaande meetwaarden zijn samengesteld voor de oefening en afgerond op 0,1 mL. Voor posities tussen 2 en 8 cm wordt een lineair model gebruikt.

x (cm)	D (mL)
2	18,4
8	31,6

a Bereken eerst de gemiddelde verandering van D per centimeter. Bereken daarmee de modeldosis bij x = 5,5 cm. Rond de dosis af op 0,1 mL.

b Een leerling noemt 26,1 mL een exact gemeten dosis. Leg uit welke aanname voor deze schatting nodig is en geef twee redenen waarom de uitspraak niet klopt.

2 De dikte van een proeflaag

Voor proeflagen van hetzelfde materiaal zijn de onderstaande meetwaarden samengesteld voor de oefening. De massa M is afgerond op 0,1 g. Tussen de gegeven laagdiktes d wordt voorlopig een lineair model gebruikt.

d (cm)	M (g)
1,6	22,0
5,6	38,0

a Welke laagdikte hoort volgens dit model bij een massa van 32,0 g? Geef je antwoord in centimeters, afgerond op 0,1 cm.

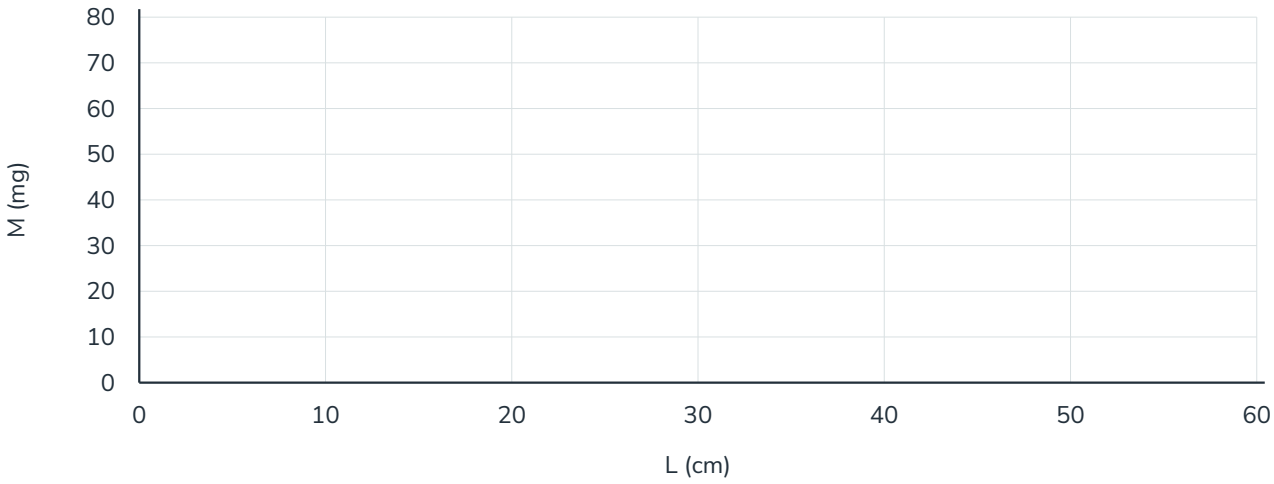
b Een aanvullende meting bij d = 3,6 cm geeft 31,0 g. Bereken wat de oorspronkelijke rechte lijn daar voorspelt. Wat zegt het verschil over de aanname van exact constante verandering? Betekent dit automatisch dat elke schatting met de lijn onbruikbaar is?

3 Een strook bedrukken

De meetwaarden voor de lengte L van een bedrukte strook en de gebruikte inktmassa M zijn samengesteld voor de oefening. Gebruik tussen de gegeven lengtes een lineair model.

L (cm)	M (mg)
10	18
50	74

Lengte en inktmassa



a Teken de twee gegevenspunten in het raster en teken de modelgrafiek alleen voor $10 \leq L \leq 50$.

b Bij welke lengte voorspelt dit model een inktmassa van 46 mg? Bereken de lengte en rond af op 0,1 cm.

De rechte lijn verlengen

Leerdoel

Ik kan een waarde buiten het gegevensinterval voorspellen met lineaire extrapolatie.

Theorie

De rechte lijn verlengen

Lineaire extrapolatie Bij extrapoleren ligt de gevraagde invoerwaarde buiten het interval van de gegeven waarden. Je verlengt het gekozen lineaire model vooruit of achteruit. De berekening gebruikt dezelfde gemiddelde verandering en opnieuw de afstand tot een bekend punt. Dat de rekenuitkomst bestaat, betekent nog niet dat het model daar bruikbaar is.

Gegevensinterval en modeldomein Het gegevensinterval loopt tussen de twee gegeven invoerwaarden. Het modeldomein is het gebied waarin je het model op grond van omstandigheden en aannames wilt gebruiken. Die gebieden kunnen verschillen. Extrapolatie kan binnen een afgesproken modeldomein vallen, maar blijft een voorspelling. Buiten dat domein is dezelfde verandering niet onderbouwd.

Zie voorbeeld 3.3B, blz. 314.

4 Opslagruimte plannen

Voor een opslagdienst zijn de onderstaande meetwaarden samengesteld voor de oefening. w is het aantal weken na de start en S de gebruikte opslagruimte. Voorlopig wordt aangenomen dat er iedere week evenveel gegevens bijkomen en niets wordt verwijderd. Dit model wordt alleen gebruikt voor $2 \le w \le 12$; na week 12 verandert de werkplanning.

w (weken)	S (GB)
2	48
6	72

a Bereken eerst de verandering in GB per week. Voorspel daarna de gebruikte opslagruimte bij $w = 9$. Geef het antwoord in hele GB.

b Waarom is de voorspelling voor week 9 een extrapolatie, hoewel week 9 binnen het opgegeven modeldomein ligt? Noem beide intervallen.

5 Een testreservoir

Bij een testreservoir zijn de onderstaande meetwaarden samengesteld voor de oefening. t is de tijd in dagen na de start van de proef en V het watervolume. Het reservoir begint pas op dag 1 te lekken. Van dag 1 tot en met dag 20 wordt als benadering een constante afname gebruikt, zonder bijvullen of regen.

t (dagen)	V (liter)
2	620
7	545

a Voorspel met dit model het watervolume op dag 12. Rond af op hele liters.

b Dezelfde rechte lijn geeft op dag 0 een volume van 650 liter. Is dat een verantwoorde voorspelling binnen de beschreven proef? Motiveer met de gegevens en de omstandigheden.

6 Een druppel laten drogen

Voor een proef met een druppel zijn de onderstaande meetwaarden samengesteld voor de oefening. t is de tijd in minuten en m de massa in mg. De onderzoekers gebruiken een lineaire benadering alleen voor $4 \leq t \leq 18$ minuten.

t (minuten)	m (mg)
4	83
10	59

a Op welk tijdstip wordt de massa volgens de doorgetrokken rechte lijn nul? Geef het tijdstip in minuten, afgerond op 0,01 minuut.

b Kun je hiermee vaststellen wanneer de werkelijke druppel verdwenen is? Leg uit.

Hoe bruikbaar is de voorspelling?

Leerdoel

Ik kan een voorspelling beoordelen op afstand tot de gegevens en aannemelijkheid van een constante verandering.

Theorie

Hoe bruikbaar is de voorspelling?

Afstand én omstandigheden Vergelijk de invoerwaarde met het gegevensinterval en het modeldomein. Buiten de gegevens kunnen omstandigheden veranderen. Ook een groot meetgat geeft weinig informatie over de tussenliggende waarden. Interpolatie over een groot interval is daarom niet automatisch nauwkeuriger dan een kleine extrapolatie. Afstand alleen bewijst geen betrouwbaarheid; constante verandering moet bij de situatie passen.

Grenzen en onzekerheid Controleer praktische grenzen zoals een niet-negatieve massa, voorraad of waterhoogte. Controleer ook meetnauwkeurigheid en mogelijke modelafwijkingen. Twee metingen geven geen garantie dat iedere voorspelling binnen een bepaalde foutmarge valt. Schrijf daarom duidelijk of een waarde gemeten of voorspeld is en onder welke aannames de voorspelling bruikbaar kan zijn. Een onmogelijke uitkomst is een reden om het model te begrenzen of te vervangen.

Zie voorbeeld 3.3B, blz. 314.

7 Een lichte kabeltas kiezen

Een atelier ontwerpt kabeltassen met lengte L. De twee proefmetingen hieronder zijn samengesteld voor de oefening. Voor lengtes van 20 tot en met 50 cm gebruikt het atelier een lineaire schatting van de massa M. Bestelbare lengtes zijn hele centimeters. De klant stelt een massagrens van 110 g. Voor zijn bestelbeslissing rekent het atelier met een werkmarge van 2 g boven de modelschatting. Die werkmarge is een afspraak, geen bewezen garantie voor iedere tas.

L (cm)	M (g)
20	84
50	126

a Welke grootste bestelbare lengte voldoet volgens de modelschatting aan de massagrens, zonder de werkmarge mee te rekenen? Onderbouw je keuze.

7 Een lichte kabeltas kiezen (vervolg)

Een atelier ontwerpt kabeltassen met lengte L. De twee proefmetingen hieronder zijn samengesteld voor de oefening. Voor lengtes van 20 tot en met 50 cm gebruikt het atelier een lineaire schatting van de massa M. Bestelbare lengtes zijn hele centimeters. De klant stelt een massagrens van 110 g. Voor zijn bestelbeslissing rekent het atelier met een werkmarge van 2 g boven de modelschatting. Die werkmarge is een afspraak, geen bewezen garantie voor iedere tas.

L (cm)	M (g)
20	84
50	126

b Een klant wil een tas van 38 cm. Accepteert het atelier die bestelling volgens zijn werkmarge? Leg ook uit waarom een bestelling die deze regel wél haalt nog geen exact bekende massa heeft.

8 Twee robotroutes

Voor een robot zijn de onderstaande accumeetwaarden samengesteld voor de oefening. t is de tijd in minuten na de start. De makers nemen voorlopig een constante afname aan van minuut 10 tot en met minuut 60. Na minuut 60 verandert de bedrijfsstand. Dit is het afgesproken modeldomein; de gegeven metingen liggen alleen bij minuut 10 en minuut 30. Voor een route moet volgens de planning bij het einde minstens 30% acculading overblijven.

t (minuten)	Acculading (%)
10	78
30	62

a Route A eindigt bij t = 55 minuten. Bepaal de verwachte acculading en beoordeel deze route volgens de planningsregel. Rond af op 0,1 procentpunt.

b Route B eindigt bij t = 65 minuten. Een planner berekent met dezelfde lijn 34,0% en zegt: “Dat is bruikbaar, want het percentage is positief en groter dan 30.” Beoordeel deze redenering. Leg ook uit waarom de uitkomst voor route A nog geen gemeten eindlading is.

9 Een groot gat en een kleine stap

Twee aparte droogproeven gebruiken hetzelfde soort coating. De omstandigheden kunnen per proef verschillen. De meetwaarden hieronder zijn samengesteld voor de oefening. Groep A beschikt alleen over zijn twee metingen; groep B alleen over de zijne. Beide groepen kiezen een lineaire benadering. t is tijd in uren en m massa in gram.

Groep	t (uren)	m (g)
A	1	96
A	9	48
B	4	78
B	5	72

a Groep A schat de massa bij t = 5 uur. Groep B schat de massa bij t = 5,2 uur. Bereken beide schattingen en benoem voor elke schatting of zij interpolatie of extrapolatie is. Rond af op 0,1 g.

b Vergelijk het gat tussen de gegeven tijden bij groep A met de afstand van de voorspelling van groep B tot zijn laatste meetpunt. Waarom bewijst het woord interpolatie op zichzelf niet dat de schatting van groep A nauwkeuriger is?

c Welke aanvullende gegevens zouden de twee groepen helpen hun voorspellingen te beoordelen? Noem één bruikbare aanvulling per groep en leg het nut uit.

10 De verkeerde afstand

Bij een proefbak zijn waterhoogtes samengesteld voor de oefening: na 4 minuten is de hoogte 11 cm en na 10 minuten 8 cm. Het lineaire model wordt gebruikt voor $0 \le t \le 18$ minuten. Een leerling schrijft bij t = 13: $h = 8 + ((8 - 11) \div (10 - 4)) \times 13 = 1{,}5$ cm. Hij noemt dit interpolatie, “want 13 ligt dicht bij 10”.

a Verbeter de berekening en de naam van de methode. Leg beide fouten uit. Geef de juiste modelhoogte op 0,1 cm.

b Bij t = 30 geeft de doorgetrokken lijn een hoogte van −2 cm. Noem twee verschillende bezwaren tegen het gebruik van die uitkomst als werkelijke waterhoogte.

11 Zelftest: een instelbare waterbak

Voor een instelbare waterbak zijn de onderstaande meetwaarden samengesteld voor de oefening. Bij instelling p hoort een watervolume V. De metingen zijn afgerond op 0,1 liter. Voor instellingen tussen 3 en 7 cm wordt een lineair model gebruikt.

p (cm)	V (liter)
3	12,8
7	23,2

a Bepaal de modelwaarde van V bij p = 5,8 cm. Rond af op 0,1 liter.

b Een extra meting bij p = 5 cm levert 18,8 liter op, ook afgerond op 0,1 liter. Iemand beweert: “Alle schattingen tussen de twee beginmetingen zijn exact, omdat het interpolatie is.” Beoordeel deze uitspraak met een berekening en een uitleg over het model.

12 Zelftest: filtermateriaal op voorraad

De onderstaande voorraadmetingen van filtermateriaal zijn samengesteld voor de oefening. w is het aantal weken na de start; F is de voorraad in kg. De planning gaat voorlopig uit van constant verbruik van week 2 tot en met week 14. Daarna verandert het productieprogramma.

w (weken)	F (kg)
2	164
6	128

a Voorspel met dit model de voorraad bij w = 10,5. Rond af op 0,1 kg.

b Dezelfde doorgetrokken lijn geeft voor week 22 een voorraad van −16 kg. Beoordeel de bruikbaarheid van de voorspellingen voor week 10,5 en week 22. Betrek de afstand tot de meetgegevens, de omstandigheden en een praktische grens in je antwoord.

3.4 Lineaire modellen vergelijken

Leerdoel

Ik kan twee lineaire modellen vergelijken op beginwaarde, helling en uitkomst.

Theorie

Vergelijken op drie punten

In $y = ax + b$ is a de verandering bij één extra eenheid van x en b de uitkomst bij $x = 0$. Vergelijk bij twee modellen eerst de beginwaarden en de hellingen. Bereken daarna de uitkomsten bij de gebruikswaarde die van belang is. Een lagere beginwaarde garandeert geen lagere uitkomst voor elk x. Een snijpunt kan een verandering in rangorde laten zien, maar alleen binnen het gezamenlijke modeldomein.

Zie voorbeeld 3.4A, blz. 316.

Onthoud: Vergelijk de uitkomsten bij hetzelfde x en met dezelfde eenheden.

Theorie

Drie hulpmiddelen bij een vergelijking

Voor een keuze bereken je beide uitkomsten bij het gevraagde gebruik en vergelijk je met de eis. Bij een parameterwijziging verandert de voorspelling met verandering beginwaarde + gebruik × verandering helling. De absolute afwijking is de afstand tussen controlewaarde en voorspelling; bij gelijke waarden is zij 0. Voor een controle vergelijk je de absolute afwijking met de toegestane grens en kijk je apart of het gebruik binnen het domein en de voorwaarden valt. Deze drie hulpmiddelen werk je in de volgende doelblokken verder uit.

1 Opnamekits huren

Een atelier vergelijkt twee modellen voor de totale huurkosten van een opnamekit: $C_A = 36 + 4t$ en $C_B = 60 + 2{,}5t$. Hierbij is t de gebruiksduur in uren en C het bedrag in euro. Beide modellen gelden voor $0 \le t \le 32$ bij hetzelfde standaardpakket, zonder extra diensten. Er wordt naar werkelijk gebruikte tijd gerekend.

a Lees bij elk model eerst het bedrag bij $t = 0$ en daarna de kosten per extra uur af. Bereken vervolgens beide bedragen bij $t = 8$. Vergelijk de uitkomsten.

b De kit is 20 uur nodig en de laagste totale kosten zijn het doel. Bereken beide bedragen voor deze gebruiksduur en onderbouw welk model je kiest.

1 Opnamekits huren (vervolg)

c Bij B daalt het uurtarief van € 2,50 naar € 2,00; het beginbedrag blijft gelijk. Schrijf het gewijzigde model. Bereken via de tariefverandering hoeveel de voorspelling bij 20 uur daalt en controleer met het nieuwe model.

t (uur)	Controlebedrag (€)
0	60
8	81
20	114
32	140

d De controletabel hoort bij het oorspronkelijke model B. De bedragen zijn samengesteld voor deze oefening. Een controlebedrag mag maximaal € 2 afwijken van de voorspelling. Bereken bij ieder tijdstip de absolute afwijking en beoordeel het model volgens deze afspraak. Is dit model op basis van de gegeven informatie ook onderbouwd voor 36 uur?

2 Water in twee reservoirs

Voor de inhoud van twee reservoirs gelden $V_A = 120 + 30t$ en $V_B = 210 + 20t$. V staat in liter en t in uren na het starten van de pompen. De modellen gelden voor $0 \leq t \leq 10$ bij dezelfde pompinstellingen en zonder afvoer van water.

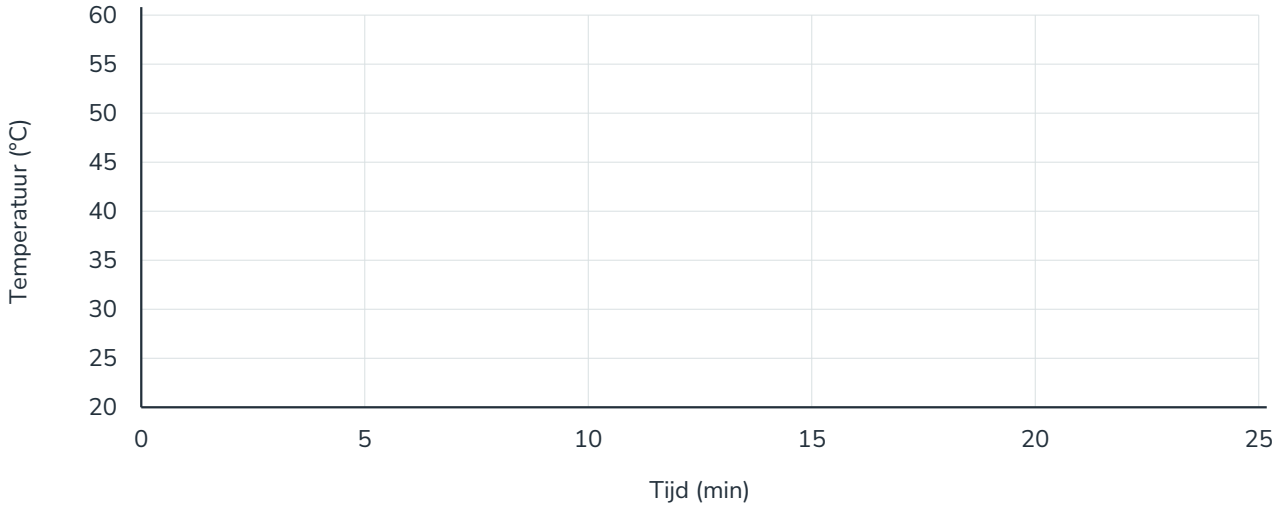
a Vergelijk de begininhoud, de toename per uur en de inhoud na 6 uur. Geef bij die gebruiksduur ook het verschil in liters.

b Na 8 uur zijn controle-inhouden van 347 liter bij A en 369 liter bij B samengesteld voor deze oefening. De afspraak is dat elke controle maximaal 10 liter afwijkt. Beoordeel beide modellen bij dit tijdstip en de onderbouwing voor gebruik bij 12 uur.

3 Een warme drank bewaren

Een ontwerpteam onderzoekt twee isolerende hoezen. Voor een drank bij een omgevingstemperatuur van 20 °C worden de volgende schattingen gebruikt: $T_A = 54 - 1{,}2t$ en $T_B = 48 - 0{,}6t$. T staat in °C en t in minuten na het begin van de vergelijking. De modellen gelden alleen voor $0 \leq t \leq 25$ bij dezelfde hoeveelheid drank en dezelfde omgeving. De begincondities hoeven niet gelijk te zijn; de modellen geven geen bewijs dat een hoes een temperatuurverschil veroorzaakt.

Temperatuurmodellen



a Teken beide modellen in het raster. Vergelijk de starttemperaturen en de voorspelde afkoeling per minuut. Welke temperatuur is na 8 minuten hoger en welke na 18 minuten? Geef in beide gevallen het verschil.

b Bij 18 minuten zijn controletemperaturen van 31,7 °C voor A en 39,0 °C voor B samengesteld. Maximaal 1,0 °C afwijking is toegestaan. Een ontwerper zegt: “B voorspelt na 18 minuten de hoogste temperatuur. Daarom is B ook het nauwkeurigste model en kun je ermee voorspellen wat na 30 minuten gebeurt.” Welke onderdelen van deze conclusie zijn met de gegevens onderbouwd? Beoordeel kwantitatief.

Een keuze onderbouwen

Leerdoel

Ik kan een passend model selecteren voor een gebruikssituatie en mijn keuze kwantitatief onderbouwen.

Theorie

Een keuze onderbouwen

Bepaal wat de situatie vraagt: bijvoorbeeld de laagste kosten, de kortste tijd of een voldoende grote reserve. Bereken voor hetzelfde gebruik de uitkomst van elk model en vergelijk met de eis. Noem in je conclusie de gekozen mogelijkheid, de bijbehorende uitkomst en een verschil of grens. Bij een bereik van gebruikswaarden moet de onderbouwing voor dat hele bereik gelden; één losse berekening is dan niet genoeg. Controleer eerst of het gebruik in de domeinen ligt.

Zie voorbeeld 3.4A, blz. 316.

4 Twee energieschattingen

Voor een installatie worden twee schattingen van het totale energiegebruik bekeken: $E_R = 12 + 0{,}7t$ en $E_S = 4 + 1{,}1t$. E staat in kWh en t in draaiuren. Beide modellen zijn alleen bedoeld voor $0 \leq t \leq 30$ bij een gelijkblijvende instelling. Het laagste voorspelde energiegebruik is het doel.

a Lees de beginwaarden en de toename per uur af. Welk model begint lager en welk model neemt minder snel toe?

b Bereken voor 15 uur en voor 25 uur de uitkomst van beide modellen. Kies per gebruiksduur het model met de laagste voorspelling.

c Voor S is bij 20 uur een controlewaarde van 27 kWh samengesteld. Maximaal 1,5 kWh afwijking is toegestaan. Vergelijk deze waarde met de voorspelling. Leg ook uit waarom deze controle geen onderbouwing geeft voor een voorspelling bij 36 uur.

5 Bezoeken aan een werkplaats

Een werkplaats biedt twee kostenmodellen aan: M = 48 + 3n en N = 18 + 5n. n is het gehele aantal bezoeken in één maand, van 0 tot en met 30. M en N zijn maandbedragen in euro, voor dezelfde toegang en zonder extra materialen.

a Je plant 12 bezoeken. Welk model kies je voor het laagste maandbedrag? Onderbouw met bedragen en het verschil.

b Een andere bezoeker verwacht tussen 18 en 24 bezoeken, inclusief deze grenzen. Welk model geeft bij elk geheel aantal in dit bereik het laagste bedrag? Onderbouw je antwoord voor het hele bereik.

6 Fotokaarten voor een filmclub

Voor dezelfde fotokaarten kan een filmclub twee totale kostenmodellen gebruiken: $C_K = 21 + 0{,}18n$ en $C_L = 42 + 0{,}12n$. n is het gehele aantal kaarten en C het bedrag in euro. De modellen gelden van 100 tot en met 700 kaarten, inclusief levering en zonder wijzigingen in het ontwerp.

a De club heeft 480 kaarten nodig en maximaal € 105 beschikbaar. Welk model past bij deze bestelling en het budget? Onderbouw met beide bedragen en het verschil.

b Iemand beweert dat L bij elk aantal in het modeldomein het voordeligst is. Beoordeel dit en geef een onderbouwde keuzeregel voor het hele domein.

7 Een energiereserve kiezen

Twee energiepakketten hebben de modellen $E_A = 240 - 12t$ en $E_B = 180 - 6t$. E is de resterende energie in Wh en t is de tijd in uren. Beide modellen gelden voor $0 \leq t \leq 12$ bij hetzelfde apparaat en een vaste gebruiksstand. Er moet bij het einde minstens 120 Wh over zijn.

a Het apparaat wordt 9 uur gebruikt. Kies het model met de grootste voorspelde reserve dat aan de eis voldoet. Beoordeel ook of datzelfde model voor 12 uur, onder dezelfde eis, geschikt is. Onderbouw beide besluiten.

Een modelparameter veranderen

Leerdoel

Ik kan de gevolgen van een verandering van een modelparameter voorspellen.

Theorie

Een modelparameter veranderen

Als alleen b verandert in y = ax + b, verandert iedere uitkomst met hetzelfde bedrag: de helling blijft gelijk. Als alleen a verandert, blijft de beginwaarde gelijk en verandert de uitkomst bij x met x keer de verandering van a. Veranderen beide parameters, dan is het verschil tussen nieuw en oud: x × verandering van a + verandering van b. Het teken van dit verschil vertelt of de voorspelling hoger of lager wordt. De wijziging kan daardoor bij klein gebruik een ander effect hebben dan bij groot gebruik.

Zie voorbeeld 3.4B, blz. 317.

Onthoud: Een parameterwijziging beschrijft een modelvoorspelling onder de gegeven aannames.

8 Een gewijzigde warmte-instelling

Een schatting van het energiegebruik van een kleine verwarmingsruimte is W = 8 + 1,6t. W staat in kWh en t in gebruiksuren. Voor beide instellingen geldt 0 ≤ t ≤ 12 bij hetzelfde gewenste klimaat. Een nieuwe instelling verhoogt de beginwaarde met 3 kWh en verlaagt de toename per uur met 0,25 kWh.

a Schrijf het model voor de nieuwe instelling. Beschrijf de betekenis van beide parameterveranderingen.

b Voorspel de verandering bij 10 uur en bij 12 uur. Is de nieuwe instelling volgens deze modellen bij 10 uur zuiniger? Onderbouw.

9 Decorstukken verplaatsen

Voor het klaarzetten en verplaatsen van gelijke decorstukken gebruikt een gezelschap M = 35 + 2,5k. M is de geschatte totale tijd in minuten en k het gehele aantal stukken, van 0 tot en met 16. Een andere werkwijze verkort de vaste voorbereiding met 10 minuten, maar vergt per stuk 0,75 minuut extra. Beide schattingen veronderstellen dezelfde route, bemanning en soorten decorstukken.

a Geef het model voor de andere werkwijze en beschrijf wat de twee parameterveranderingen doen met de voorspelling.

b De coördinator verwacht ook bij 16 stukken 10 minuten tijdwinst. Beoordeel die verwachting. Voor welke gehele aantallen in het domein voorspelt de andere werkwijze een kortere totale tijd?

10 Ventilatie anders instellen

Het totaal doorgestroomde luchtvolume van een proefopstelling wordt geschat met V = 90 + 18t. V staat in m^3 en t in uren na het afgesproken begin. Het oorspronkelijke model geldt voor $0 \le t \le 8$. Bij een gewijzigde instelling wordt de beginwaarde 30 m^3 lager en de toename per uur 6 m^3 groter. Voor de gewijzigde instelling is alleen het domein $0 \le t \le 6$ onderbouwd, bij dezelfde ruimte en meetmethode.

a Schrijf het gewijzigde model. Voorspel het verschil met het oorspronkelijke model bij 2 uur en bepaal het tijdstip waarop beide voorspellingen gelijk zijn.

b Met de twee formules kun je bij 7 uur een verschil van 12 m^3 berekenen. Is dat verschil op basis van de gegeven informatie een onderbouwde voorspelling voor de twee instellingen? Leg uit.

11 Twee redeneringen herstellen

Voor een gedeelde werkruimte gelden $C_A = 15 + 4x$ en $C_B = 27 + 2x$. C is het maandbedrag in euro en x het gehele aantal gebruiksmomenten, van 0 tot en met 12. Een leerling zegt: “B begint hoger, dus B is altijd duurder. Als het tarief van B daalt van € 2 naar € 1,50 per gebruiksmoment, schuift de grafiek bij elk x precies € 3 omlaag.”

a Herstel beide redeneringen. Geef voor de eerste een berekend tegenvoorbeeld. Beschrijf voor de tweede de juiste invloed op beginwaarde, helling en bedragen, met berekeningen bij twee verschillende x-waarden.

Past het model bij de situatie?

Leerdoel

Ik kan de geldigheid van een model toetsen aan data en grenzen van de context.

Theorie

Past het model bij de situatie?

Bereken de modeluitkomst bij iedere controlewaarde. De absolute afwijking is de afstand tussen controlewaarde en voorspelling; bij gelijke waarden is zij 0. Vergelijk die afwijking met de afgesproken tolerantie; een afwijking precies op de grens is toegestaan als er “maximaal” staat. Als één waarde de afspraak overschrijdt, voldoet het model niet voor alle gegevens. Een passende controle maakt een model nog niet zeker voor alle omstandigheden. Controleer daarnaast het domein en de voorwaarden, zoals een vaste instelling of gelijke producten. Een afwijking kan passen bij meetonzekerheid of een ongeschikt model, maar bewijst zonder extra informatie geen specifieke oorzaak.

Zie voorbeeld 3.4B, blz. 317.

12 Controle van spoelwater

Voor het watergebruik van een spoelinstallatie wordt L = 25 + 6n gebruikt. L staat in liter en n is het gehele aantal gelijke spoelcycli, van 0 tot en met 8. Het model is opgesteld voor één vaste sproeier en een gelijkblijvende belading. De controlegegevens zijn samengesteld voor deze oefening. Een absolute afwijking van maximaal 3 liter is toegestaan.

n (cycli)	Controlewaarde (liter)
0	25
2	39
4	49
6	65
8	75

a Bij welk aantal cycli is de absolute afwijking het grootst? Bereken die afwijking.

b Voldoet het model aan de controleafspraak voor alle gegevens? Onderbouw en geef aan wat je uit de afwijkingen wel kunt vaststellen.

12 Controle van spoelwater (vervolg)

Voor het watergebruik van een spoelinstallatie wordt L = 25 + 6n gebruikt. L staat in liter en n is het gehele aantal gelijke spoelcycli, van 0 tot en met 8. Het model is opgesteld voor één vaste sproeier en een gelijkblijvende belading. De controlegegevens zijn samengesteld voor deze oefening. Een absolute afwijking van maximaal 3 liter is toegestaan.

n (cycli)	Controlewaarde (liter)
0	25
2	39
4	49
6	65
8	75

c Kan de gegeven controle onderbouwen dat het model bruikbaar is voor 10 cycli met een andere sproeier? Licht toe.

13 Zelftest: vergelijken en wijzigen

Bij twee opruimploegen wordt de totale afgelegde route geschat met $R_A = 180 + 24t$ en $R_B = 260 + 14t$. R staat in meter en t in uren na het begin van de vergelijking. Bij dat begin hebben beide ploegen al een stuk van de route afgelegd. De modellen gelden voor $0 \le t \le 10$, met dezelfde taakverdeling en doorlopend werk.

a Vergelijk de beginwaarden en de toenamen per uur. Welke ploeg heeft volgens de modellen na 6 uur de grootste totale route, en welke na 10 uur? Geef beide verschillen.

b Voor A wordt de beginwaarde 30 meter lager en de toename per uur 5 meter groter. Geef het nieuwe model en voorspel het verschil met de oorspronkelijke uitkomst bij 6 uur en bij 10 uur.

14 Zelftest: keuze en geldigheid

Voor twee werkwijzen bij het vullen van gelijke zakken worden $T_U = 16 + 0{,}8n$ en $T_V = 40 + 0{,}5n$ gebruikt. T is de totale tijd in minuten en n het gehele aantal zakken. De modellen gelden voor $20 \le n \le 160$, bij dezelfde inhoud per zak en dezelfde bezetting.

a Er moeten 120 zakken binnen 105 minuten worden gevuld. Welke werkwijze voldoet volgens de modellen? Onderbouw je keuze met beide tijden en hun verschil.

n (zakken)	Controletijd (min)
40	61
80	83
120	104

b De tabel bevat voor deze oefening samengestelde controletijden voor V. Iedere controle mag maximaal 3 minuten afwijken. Beoordeel het model volgens deze afspraak en beoordeel de uitspraak: “Dit model is met deze gegevens bruikbaar voor 200 zakken.”

Herhaling

Gebruik de vier herhalingsopgaven om de hoofdstukvaardigheden opnieuw te verbinden. Schrijf berekeningen, eenheden en conclusies op.

73 Doek voor een lichtinstallatie

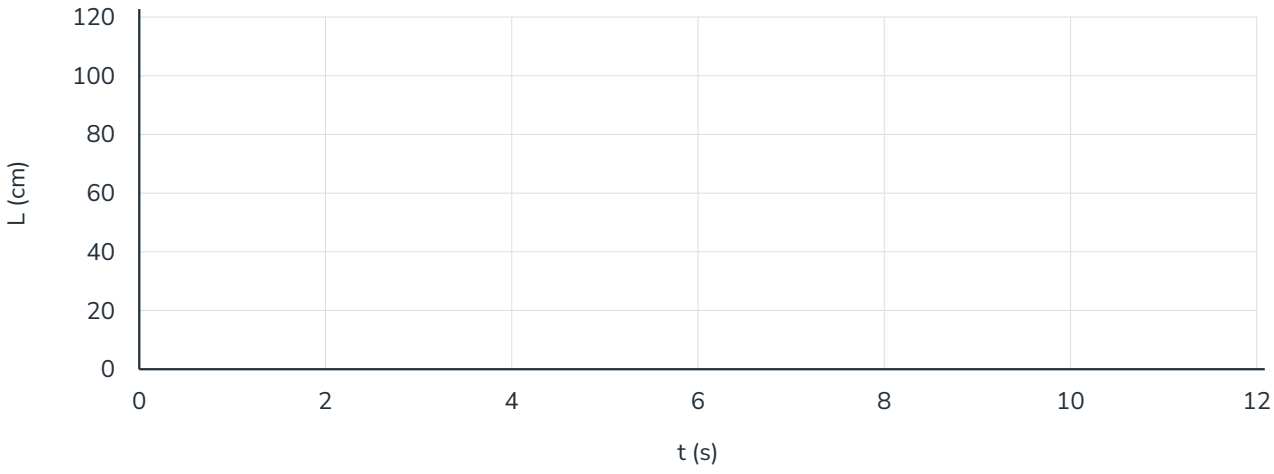
Een motor rolt doek uit. De meetgegevens zijn samengesteld voor deze oefening. t is de tijd in seconden na het inschakelen en L de uitgerolde lengte in centimeters. Het model veronderstelt een constante snelheid en geldt voor $0 \le t \le 12$. Geef berekende lengtes exact.

t (s)	L (cm)
0	18
3	42
6	66
9	90

a Onderzoek of de tabel past bij een lineair verband. Onderbouw met de veranderingen en hun eenheden.

b Bereken de helling en de beginwaarde van dit model uit de punten (3, 42) en (9, 90).

Uitgerold doek



c Stel de formule voor L op en leg beide parameters uit. Teken de modelgrafiek in het raster en bereken L bij $t = 11$.

74 Water verplaatsen

Tijdens een demonstratie loopt vat A leeg en wordt vat B gevuld. A = 210 − 14t en B = 90 + 9t, met t in minuten en beide hoeveelheden in liters. De vaten zijn niet met elkaar verbonden: water uit A wordt apart opgevangen en B wordt uit een andere bron gevuld. De snelheden zijn constant. Beide modellen gelden voor 0 ≤ t ≤ 15. Rond een tijd en hoeveelheid alleen in b af op twee decimalen.

a Na hoeveel minuten bevat vat A nog 42 liter? Controleer je uitkomst in de formule.

b Bereken het snijpunt van de twee modellen. Leg uit wat beide coördinaten betekenen.

c De demonstrator bekijkt alleen de hele minuten t = 0, 1, ..., 15. Bij welke van die minuten bevat A niet meer water dan B?

75 Droogproef met textiel

Een atelier weegt een nat stuk textiel. De meetgegevens zijn samengesteld voor de oefening. t is de droogtijd in uren; M is de massa in kilogram. Tussen de metingen wordt een constante massaverandering aangenomen. Het gemeten interval is 2 ≤ t ≤ 10; voorspellingen daarbuiten zijn voorlopig. Rond massa's af op twee decimalen.

t (uur)	M (kg)
2	1,84
6	1,36
10	0,88

a Bereken met lineaire interpolatie de massa na 7 uur.

b Voorspel met hetzelfde constante veranderingsmodel de massa na 12 uur. Benoem of dit interpolatie of extrapolatie is.

c Een medewerker wil hetzelfde model gebruiken tot 30 uur. Beoordeel die voorspelling en vergelijk de betrouwbaarheid met die bij 7 en 12 uur.

76 Snijtijd in een panelenatelier

Een atelier kan een complete partij panelen op station A of B snijden. De totale tijd per partij is A = 18 + 1,6n of B = 38 + 1,1n, met n het gehele aantal panelen en de tijd in minuten. Beide modellen gelden voor 1 ≤ n ≤ 80. Omsteltijd is inbegrepen; partijen kunnen niet worden gecombineerd. Het atelier maakt tien partijen van 20 panelen en twee partijen van 70 panelen. Geef tijden exact.

a Vergelijk de beginwaarden en hellingen. Welk station is sneller bij een partij van 50 panelen en hoeveel minuten scheelt dat?

b Het atelier gebruikt één station voor alle twaalf genoemde partijen. Kies het station met de minste totale tijd en onderbouw de keuze.

c Een nieuwe veiligheidscontrole verhoogt alleen de vaste tijd van A van 18 naar 28 minuten per partij. Voorspel de totale tijd voor de twaalf partijen. Een samengestelde proefmeting bij n = 70 geeft daarna 160 minuten; afwijkingen tot en met 5 minuten zijn aanvaardbaar. Beoordeel het nieuwe model bij die meting.

Herstel

Kies met je docent de herstelvragen die passen bij wat nog niet lukt. Benoem bij een fout wat moet veranderen en werk de verbeterde berekening volledig uit.

81 Een meetkaart herstellen

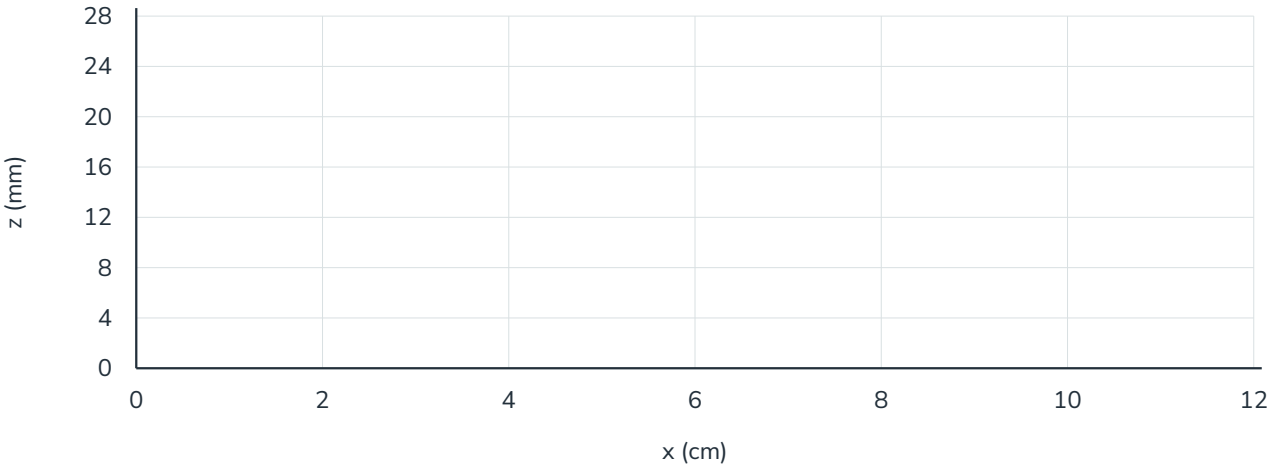
Een camera verschuift langs een rail. x is de afstand in centimeters en z een scherptecorrectie in millimeters. De samengestelde meetkaart geldt voor $0 \le x \le 12$. Een medewerker zegt: “De dalingen in de tabel zijn niet gelijk, dus het verband is niet lineair.” Reken exact; de beweging en correctie zijn continu.

x (cm)	z (mm)
0	26
2	23
6	17
10	11

a Onderzoek de uitspraak van de medewerker. Bereken de verandering per centimeter in elk interval.

b Een tweede medewerker schrijft $z = -1{,}5 + 26x$. Herstel de formule en leg uit wat de twee getallen betekenen.

Scherptecorrectie



c Bereken de correctie bij $x = 8$. Teken de volledige modelgrafiek voor het gegeven domein in het raster.

82 De grens is niet hetzelfde als goedkoop

Een werkplaats vergelijkt twee pakketten voor n ingerichte werkplekken. De exacte kosten in euro zijn A = 72 + 4,8n en B = 180 + 2,4n. n is een geheel aantal met 0 ≤ n ≤ 60. Beantwoord met gehele aantallen; rond tussenberekeningen niet af.

a Voor A met een budget van € 240 schrijft iemand: 72 + 4,8n = 240; 4,8n = 312; n = 65. Wijs de eerste fout aan, herstel de berekening en controleer de oplossing.

b Bereken het snijpunt van de kostenmodellen en leg de betekenis uit.

c Iemand concludeert: “B is goedkoper vanaf 45 werkplekken.” Onderzoek dit met een ongelijkheid en verbeter de conclusie.

83 Een koeladvies verbeteren

Een voedselatelier vergelijkt koelkasten P en Q. De modellen zijn P = 22 − 0,8t en Q = 22 − 0,6t, met t in minuten en de temperatuur in °C. Door de thermostaat koelt geen van beide onder 8 °C; de formule voor P geldt voor 0 ≤ t ≤ 17,5 en die voor Q voor 0 ≤ t ≤ $\frac{70}{3}$. De meetgegevens voor P zijn samengesteld: bij 5 minuten is het 18 °C en bij 10 minuten 14 °C. Gebruik bij a deze twee metingen. Geef tijden op één decimaal en temperaturen op één decimaal.

a Bereken de temperatuur bij 7 en 15 minuten uit de twee metingen. Benoem de twee voorspellingsvormen en geef aan welke voorspelling beter door de metingen wordt ondersteund.

b Een partij moet uiterlijk na 16 minuten 10 °C of lager zijn. Vergelijk de beginwaarden en hellingen van P en Q en adviseer een koelkast met een kwantitatieve onderbouwing.

c Bij P stijgt de begintemperatuur naar 24 °C; de helling blijft −0,8. De thermostaatgrens blijft 8 °C. Bepaal het bijbehorende nieuwe modeldomein. Bepaal de gevolgen voor het bereiken van 10 °C. Samengestelde nieuwe metingen geven bij t = 10 een temperatuur van 16,2 °C en bij t = 20 een temperatuur van 8,1 °C; een afwijking tot en met 0,3 °C is aanvaardbaar. Beoordeel het gewijzigde lineaire model bij die metingen en bij t = 25.

Nieuwe controle

Maak de geselecteerde controlevragen zelfstandig. Gebruik de gegeven gegevens en noteer berekeningen en conclusies.

84 Een meetframe opnieuw controleren

Een makerslab controleert verschillende instellingen van een meetframe. Alle gegeven meetwaarden zijn samengesteld voor deze oefening. x is een continue verplaatsing in centimeters en F een kracht in newton. Elke subvraag bevat de gegevens die zij nodig heeft; de instellingen verschillen. Geef krachten op één decimaal als dat nodig is. Bij a tot en met d geldt $0 \le x \le 10$. Bij e en f zijn alleen de metingen $x = 12$ en $x = 20$ beschikbaar; een constante verandering is daar een veronderstelling.

x (cm)	F (N)
0	38
2	43
4	48

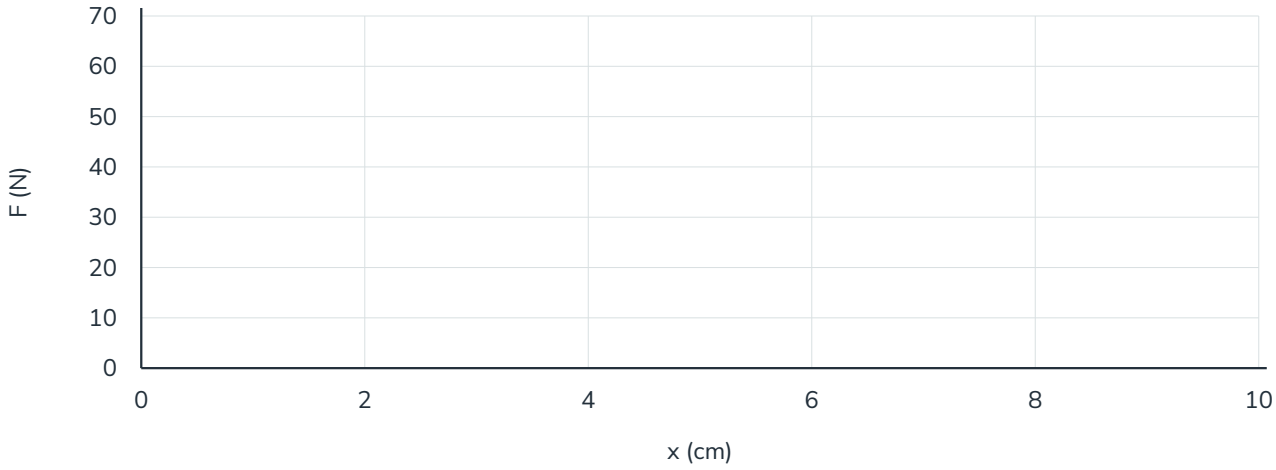
a Een instelling geeft de waarden in de tabel. Onderzoek of die waarden een lineair verband vormen.

b Een andere instelling heeft de punten (3; 47,5) en (9; 62,5). Bereken de helling en de beginwaarde.

c Bij een derde instelling is de kracht bij $x = 0$ gelijk aan 35 N. Per centimeter stijgt zij 3 N. Stel een formule op voor F en geef de betekenis en eenheden van beide parameters.

84 Een meetframe opnieuw controleren (vervolg)

Krachtmeting



d Voor een vierde instelling geldt F = 38 + 2,5x. Teken de grafiek in het raster voor het gegeven domein en bereken F bij x = 8.

e Bij een aparte kalibratie zijn de meetpunten (12, 72) en (20, 84). Bereken met een lineair model de kracht bij x = 17.

f Gebruik de meetpunten (12, 72) en (20, 84) voor een lineaire voorspelling bij x = 24. Voor veilig gebruik mag het frame hoogstens 22 cm verplaatsen. Beoordeel de bruikbaarheid van de voorspelling en vergelijk haar onderbouwing met die bij x = 17.

85 Twee mobiele meetkarren

Een organisatie huurt voor één maand een meetkar. De exacte tarieven in euro zijn A = 64 + 3,2n en B = 154 + 1,7n; n is het gehele aantal meetrondes, met 0 ≤ n ≤ 90. Er zijn geen andere kosten. Budgetten mogen niet worden overschreden. Reken met de exacte tarieven; geldbedragen worden op centen geschreven. Alleen g bevat samengestelde metingen met een afzonderlijke meetmarge.

a Bij hoeveel meetrondes kost kar A precies € 224? Stel de vergelijking op en los haar op.

b Bereken het snijpunt van de twee kostenmodellen en geef de betekenis van beide coördinaten.

c Voor welke toegestane gehele aantallen meetrondes is A strikt goedkoper dan B?

d Een medewerker beweert: “Voor B zijn 33 meetrondes mogelijk met een budget van € 210.” Controleer deze bewering door substitutie.

e Vergelijk beginwaarden en hellingen. Kies een kar voor 75 meetrondes en onderbouw je keuze met beide kosten.

f B verhoogt alleen de prijs per meetronde van € 1,70 naar € 2,00. Voorspel de gevolgen voor 75 meetrondes en voor de keuze tussen A en B bij dat aantal.

g Bij het oorspronkelijke model B = 154 + 1,7n zijn twee samengestelde meetuitkomsten verzameld: € 187,80 bij n = 20 en € 294,40 bij n = 80. Een afwijking tot en met € 1,00 is aanvaardbaar. Beoordeel de geldigheid van het model bij deze metingen en van een voorspelling voor n = 100.

Leerdoelen

Kijk na Test jezelf per leerdoel terug op je eigen werk.

3.1 Lineaire formules en grafieken

Ik kan een lineair verband herkennen aan een constante absolute verandering.

Ik kan helling en beginwaarde berekenen uit twee punten, een tabel of een tekst.

Ik kan een lineaire formule opstellen en de parameters met hun eenheden interpreteren.

Ik kan bij een lineaire formule een grafiek tekenen en relevante waarden berekenen.

3.2 Snijpunten, vergelijkingen en ongelijkheden

Ik kan een lineaire vergelijking opstellen en oplossen bij een context.

Ik kan de coördinaten van een snijpunt van twee lijnen berekenen en in de context interpreteren.

Ik kan een lineaire ongelijkheid oplossen en de oplossingswaarden in de context aangeven.

Ik kan een algebraïsche oplossing controleren met substitutie of een grafiek.

3.3 Interpoleren en extrapoleren

Ik kan een onbekende waarde tussen twee gegevenspunten berekenen met lineaire interpolatie.

Ik kan een waarde buiten het gegevensinterval voorspellen met lineaire extrapolatie.

Ik kan een voorspelling beoordelen op afstand tot de gegevens en aannemelijkheid van een constante verandering.

3.4 Lineaire modellen vergelijken

Ik kan twee lineaire modellen vergelijken op beginwaarde, helling en uitkomst.

Ik kan een passend model selecteren voor een gebruikssituatie en mijn keuze kwantitatief onderbouwen.

Ik kan de gevolgen van een verandering van een modelparameter voorspellen.

Ik kan de geldigheid van een model toetsen aan data en grenzen van de context.

Eindevaluatie

Noteer per leerdoel wat lukt, wijs bewijs aan in eigen werk en kies één volgende oefenstap.

Gebruik drie korte aanduidingen: zelfstandig beheerst, nog hulp nodig of opnieuw oefenen. Schrijf bij elk leerdoel een opgave en subvraag als bewijs; een berekening of uitleg die je kunt verantwoorden telt als bewijs.

Welke aanpak hielp je? Welke fout wil je voorkomen? In welke betekenisvolle situatie kun je een lineair model gebruiken, en welke grens heeft dat model?

Kies daarna met je docent gerichte herstelvragen en maak vervolgens de bijbehorende nieuwe controlevragen zonder hulp.

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
Test jezelf opgave 77a–d	Lineair herkennen, parameters, formule en grafiek	Herstel opgave 81a–c	Nieuwe controle opgave 84a–d
Test jezelf opgave 78a–d	Vergelijking, snijpunt, ongelijkheid en substitutie	Herstel opgave 82a–c; 3.2 opgave 15a–b	Nieuwe controle opgave 85a–d
Test jezelf opgave 79a–c	Interpolatie, extrapolatie en bruikbare voorspelling	Herstel opgave 83a,c	Nieuwe controle opgave 84e–f
Test jezelf opgave 80a–d	Model vergelijken, kiezen, wijzigen en toetsen	Herstel opgave 83b–c	Nieuwe controle opgave 85e–g

Voorbeeld 3.1A

Een maatcilinder vullen

Tijdens een demonstratie wordt een maatcilinder gevuld. De onderstaande meetgegevens zijn samengesteld voor deze oefening. t is de tijd in minuten en V is het volume vloeistof in milliliter. Voor de verdere berekeningen gebruiken we het lineaire model dat bij de tabel past, alleen voor $0 \le t \le 11$.

t (min)	V (ml)
3	19
7	31
11	43

a Laat zien dat de tabel bij een lineair verband past en bepaal de formule voor V.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek of de tabel een constante absolute verandering ondersteunt, en daarna de helling, beginwaarde en formule.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vergelijk de volumeveranderingen bij de bijbehorende tijdstappen. Omdat het model lineair is, is de helling het volumeverschil per minuut. Daarna reken ik een bekend punt terug naar t = 0.

3. Berekening

De tijdstappen zijn $7 - 3 = 4$ en $11 - 7 = 4$ minuten. De volumeveranderingen zijn $31 - 19 = 12$ en $43 - 31 = 12$ ml. Dus $a = 12 \div 4 = 3$ ml per minuut. $b = 19 - 3 \times 3 = 10$ ml. Daarom $V = 3t + 10$.

4. Antwoord in context

De tabel past bij een lineair model: er komt 3 ml per minuut bij en bij het begin is er volgens het model 10 ml. De formule is $V = 3t + 10$.

5. Controle

Invullen geeft $V(3) = 19$, $V(7) = 31$ en $V(11) = 43$ ml. Alle drie de gegeven waarden passen; voor verder gebruik houd ik het afgesproken domein aan.

Voorbeeld 3.1A

Een maatcilinder vullen

Tijdens een demonstratie wordt een maatcilinder gevuld. De onderstaande meetgegevens zijn samengesteld voor deze oefening. t is de tijd in minuten en V is het volume vloeistof in milliliter. Voor de verdere berekeningen gebruiken we het lineaire model dat bij de tabel past, alleen voor $0 \leq t \leq 11$.

t (min)	V (ml)
3	19
7	31
11	43

b Wat betekenen de twee parameters en hoeveel vloeistof zit er volgens het model na 9 minuten in de cilinder?

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de betekenis van 3 en 10 en de modelwaarde bij t = 9 minuten.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik lees de parameters in $V = 3t + 10$ met hun eenheden en vul 9 in voor t, omdat de gevraagde tijd bekend is.

3. Berekening

De parameter 3 heeft de eenheid ml per minuut. De parameter 10 heeft de eenheid ml. $V(9) = 3 \times 9 + 10 = 27 + 10 = 37$ ml.

4. Antwoord in context

Er komt 3 ml per minuut bij; bij t = 0 bevat de cilinder volgens het model 10 ml. Na 9 minuten bevat hij 37 ml.

5. Controle

9 ligt tussen de meettijden 7 en 11. Twee minuten na t = 7 moet er $2 \times 3 = 6$ ml bij zijn gekomen: $31 + 6 = 37$ ml. Dat komt overeen met de formule.

Voorbeeld 3.1B

Een robotwagen nadert een markering

Een robotwagen rijdt naar een markering. Het samengestelde model voor de afstand A in meter tot die markering is $A = 72 - 4t$. t is de tijd in minuten na het starten. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 15$.

a Teken de modelgrafiek voor het gegeven domein.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de rechte grafiek van de afstand voor tijden van 0 tot en met 15 minuten.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Een lineaire grafiek ligt vast door twee punten. Ik kies de domeineindpunten, zodat ik meteen het volledige toegestane lijnstuk teken.

Voorbeeld 3.1B (vervolg)

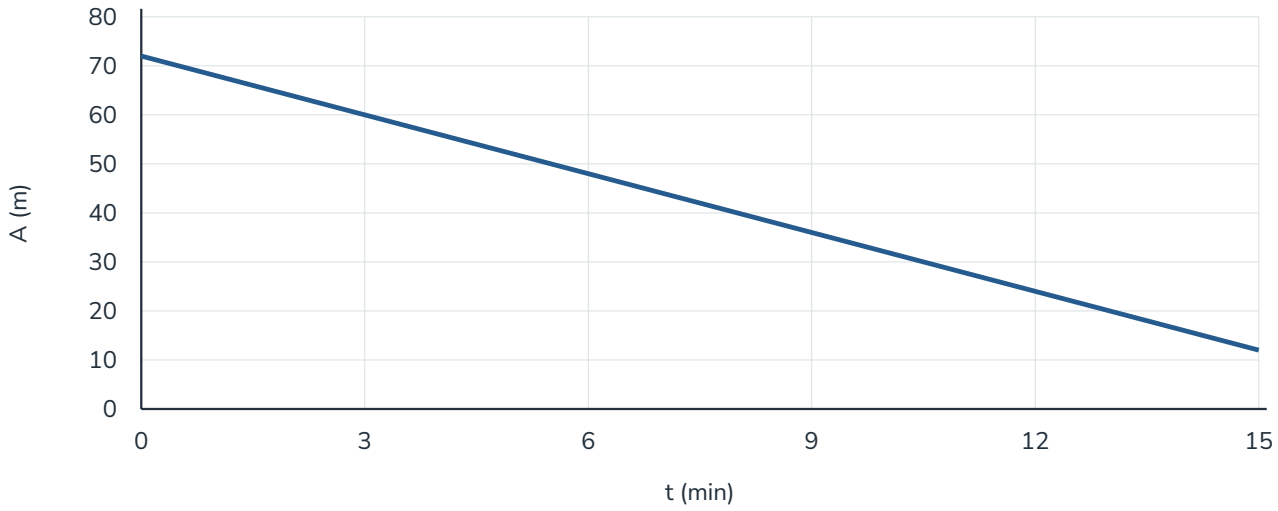
Een robotwagen nadert een markering

a Teken de modelgrafiek voor het gegeven domein.

3. Berekening

A(0) = 72 − 4 × 0 = 72 m en A(15) = 72 − 4 × 15 = 12 m. Ik zet de punten (0, 72) en (15, 12) uit en verbind ze met een rechte lijn. De assen geven t in minuten en A in meter.

A = 72 − 4t



4. Antwoord in context

De modelgrafiek daalt van 72 m bij het starten tot 12 m na 15 minuten.

5. Controle

De lijn moet dalen omdat de helling −4 m per minuut is. Bij t = 6 hoort A = 72 − 24 = 48 m; dit punt ligt op het getekende lijnstuk.

Voorbeeld 3.1B

Een robotwagen nadert een markering

Een robotwagen rijdt naar een markering. Het samengestelde model voor de afstand A in meter tot die markering is $A = 72 - 4t$. t is de tijd in minuten na het starten. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 15$.

b Na hoeveel minuten is de robotwagen nog 40 m van de markering? Geef een exact antwoord.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de tijd t waarop de afstand A precies 40 m is.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Omdat de afstand bekend is en de tijd onbekend, stel ik de formule gelijk aan 40. Ik los de vergelijking op om een exact tijdstip te krijgen.

3. Berekening

$72 - 4t = 40$. Dus $4t = 32$ en $t = 8$ minuten.

4. Antwoord in context

Na 8 minuten is de robotwagen volgens het model nog 40 m van de markering.

5. Controle

8 ligt binnen $0 \leq t \leq 15$. Invullen geeft $72 - 4 \times 8 = 40$ m, dus de uitkomst voldoet aan de vraag.

Voorbeeld 3.2A

Gelijke kosten voor decorpanelen

Twee ateliers leveren dezelfde decorpanelen. Atelier A gebruikt het kostenmodel $A = 125 + 7n$ en atelier B het model $B = 197 + 4n$. De kosten zijn in euro en n is het aantal panelen. Alleen hele aantallen van 0 tot en met 50 kunnen worden besteld. Er zijn geen andere kosten. Voor het tekenen worden de formules als rechte modellen op $0 \le n \le 50$ weergegeven; alleen de gehele invoerwaarden stellen bestellingen voor.

a Bij welk aantal panelen zijn de kosten gelijk en wat zijn die gemeenschappelijke kosten?

1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal panelen waarbij de twee kostenmodellen gelijk zijn én het bijbehorende bedrag.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik kies n als onbekende. Gelijke kosten betekenen $A = B$; daarom stel ik de twee uitdrukkingen gelijk en los ik de vergelijking met de balansmethode op. Daarna bereken ik de tweede coördinaat.

3. Berekening

$125 + 7n = 197 + 4n$ geeft $3n = 72$, dus $n = 24$. Invullen geeft $A(24) = 125 + 168 = 293$ en $B(24) = 197 + 96 = 293$.

4. Antwoord in context

Bij 24 panelen kosten beide ateliers € 293. Het snijpunt is (24; 293). Het aantal 24 is geheel en ligt tussen 0 en 50.

5. Controle

Ik vul 24 in beide oorspronkelijke modellen in. Beide geven € 293, dus de gelijkheid en beide coördinaten kloppen.

Voorbeeld 3.2A

Gelijke kosten voor decorpanelen

Twee ateliers leveren dezelfde decorpanelen. Atelier A gebruikt het kostenmodel $A = 125 + 7n$ en atelier B het model $B = 197 + 4n$. De kosten zijn in euro en n is het aantal panelen. Alleen hele aantallen van 0 tot en met 50 kunnen worden besteld. Er zijn geen andere kosten. Voor het tekenen worden de formules als rechte modellen op $0 \leq n \leq 50$ weergegeven; alleen de gehele invoerwaarden stellen bestellingen voor.

b Teken beide kostenmodellen en controleer grafisch het berekende snijpunt.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek of de twee getekende modelgrafieken elkaar bij (24; 293) kruisen.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Een lineair model is een rechte lijn. Ik kies daarom twee domeineindpunten per model en gebruik voor beide dezelfde assen; zo kan ik het algebraïsche punt met de lijnen vergelijken.

Voorbeeld 3.2A (vervolg)

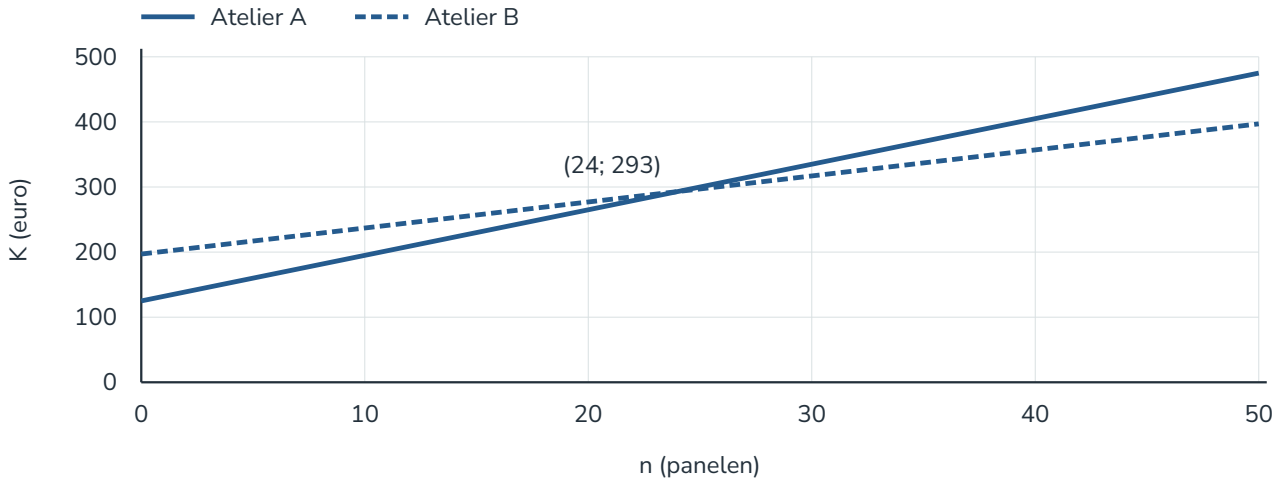
Gelijke kosten voor decorpanelen

b Teken beide kostenmodellen en controleer grafisch het berekende snijpunt.

3. Berekening

Voor A bereken ik (0; 125) en (50; 475). Voor B bereken ik (0; 197) en (50; 397). Ik teken de twee rechte lijnen door deze punten en markeer (24; 293).

Kosten van decorpanelen



4. Antwoord in context

Beide lijnen gaan door het gemarkeerde punt. De grafiek toont dus gelijke kosten van € 293 bij 24 panelen.

5. Controle

Ik controleer de exacte coördinaten nogmaals: $125 + 7 \times 24 = 293$ en $197 + 4 \times 24 = 293$. De grafiek en de substitutie geven dezelfde uitkomst.

Voorbeeld 3.2B

Een strikte grens bij volledige minuten

Voor deze oefening zijn fictieve meetgegevens van een leeglopend reservoir samengesteld. Het gekozen model is $V = 205 - 12m$, met V in liter en m in minuten. Het afvoertempo blijft constant. Er wordt alleen bij gehele minuten gemeten, vanaf $m = 0$ tot en met $m = 17$. Een onderdeel kan beginnen als er meer dan 68 liter over is.

a Bij welke toegestane meetmomenten kan het onderdeel beginnen? Geef alle mogelijkheden en verantwoord de grens.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek alle gehele meetmomenten waarop V groter is dan 68 liter, binnen $0 \leq m \leq 17$.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vertaal meer dan met >. Omdat V afneemt, komt er bij het oplossen een deling door een negatief getal; daarbij moet ik de richting omkeren. Daarna beperk ik de uitkomst tot gehele minuten in het domein.

Voorbeeld 3.2B (vervolg)

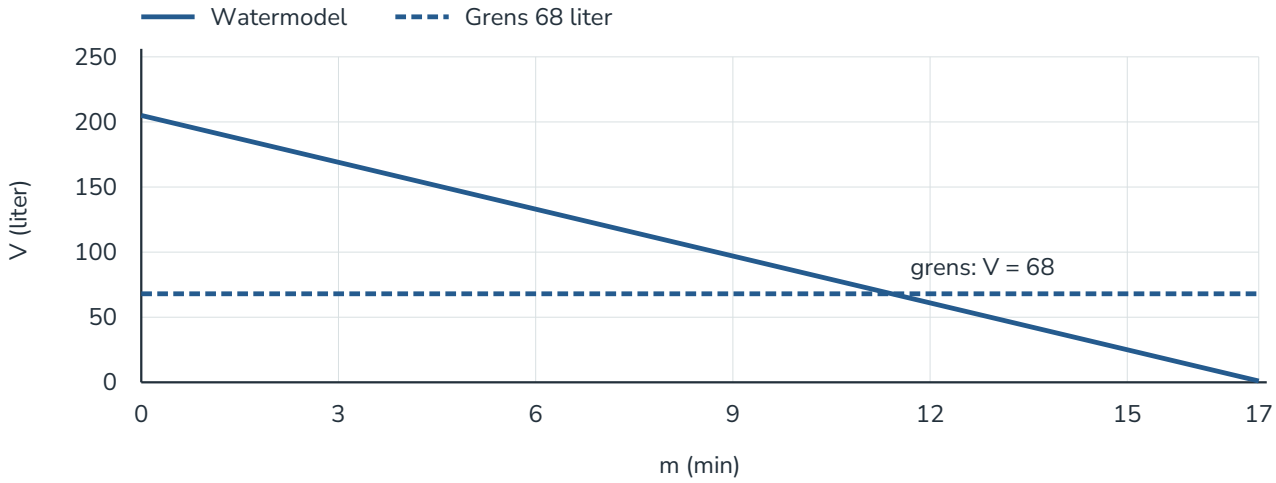
Een strikte grens bij volledige minuten

a Bij welke toegestane meetmomenten kan het onderdeel beginnen? Geef alle mogelijkheden en verantwoord de grens.

3. Berekening

$205 - 12m > 68$ geeft $-12m > -137$. Delen door -12 geeft $m < \frac{137}{12} = 11\frac{5}{12}$. De toegestane gehele waarden zijn daarom 0 tot en met 11.

Watermodel en grens



4. Antwoord in context

Het onderdeel kan bij de metingen op 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 en 11 minuten beginnen. Het laatste passende meetmoment is na 11 minuten.

5. Controle

Bij $m = 11$ is $V = 73$ liter, meer dan 68. Bij $m = 12$ is $V = 61$ liter, dus te weinig. In de grafiek ligt de waterlijn vóór de grens van 137 gedeeld door 12 minuten boven de lijn $V = 68$; de grens zelf is uitgesloten.

Voorbeeld 3.3A

Een folie tussen twee diktes

Bij een proef met lichtdoorlatende folie zijn meetwaarden samengesteld voor de oefening. Bij een dikte van 0,4 mm gaat 76% van het licht door; bij 1,0 mm is dat 52%. Tussen deze diktes wordt een lineaire benadering gebruikt.

a Schat het percentage doorgelaten licht bij een dikte van 0,7 mm. Rond af op hele procenten en leg uit welke aanname je gebruikt.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een percentage bij 0,7 mm. Die dikte ligt tussen de gegeven diktes van 0,4 en 1,0 mm: interpolatie.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik kies de gemiddelde verandering per millimeter en reken vanaf 0,4 mm, omdat het model een constante verandering tussen de twee metingen aanneemt.

3. Berekening

$r = (52 - 76) \div (1{,}0 - 0{,}4) = -24 \div 0{,}6 = -40$ procentpunt per mm. Het verschil in dikte is $0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$ mm. De schatting is $76 - 40 \times 0{,}3 = 64\%$.

4. Antwoord in context

Volgens het lineaire model gaat bij 0,7 mm ongeveer 64% van het licht door. Dat veronderstelt een constante afname per millimeter, bij dezelfde omstandigheden.

5. Controle

0,7 mm ligt precies midden tussen de twee diktes. 64% ligt ook midden tussen 76% en 52%. Dit controleert de berekening, maar bewijst niet dat er bij 0,7 mm werkelijk 64% wordt gemeten.

Voorbeeld 3.3B

Een gelmonster laten drogen

Voor een droogproef met een gelmonster zijn meetwaarden samengesteld voor de oefening. Na 2 uur is de massa 84 g; na 5 uur is de massa 66 g. Een lineair model wordt voorlopig gebruikt voor $2 \le t \le 10$ uur, zolang de droogomstandigheden gelijk blijven.

a Voorspel de massa na 7 uur. Geef de massa in hele grammen en benoem de methode.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de massa bij $t = 7$ uur. Dat is na de laatste gegeven meting bij 5 uur.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik verleng de rechte lijn met de gemiddelde verandering per uur, omdat het gekozen model een constante afname veronderstelt. Ik reken vanaf de meting bij 5 uur.

3. Berekening

$r = (66 - 84) \div (5 - 2) = -18 \div 3 = -6$ g per uur. $m = 66 - 6 \times (7 - 5) = 54$ g.

4. Antwoord in context

Het model voorspelt na 7 uur 54 g. De methode is extrapolatie: 7 ligt buiten het gegevensinterval van 2 tot 5 uur.

5. Controle

Terugrekenen van 5 naar 2 uur geeft $66 + 6 \times 3 = 84$ g, zoals in de gegevens. 54 g is positief en 7 uur ligt binnen het modeldomein; de massa blijft een voorspelling onder de droogaanname.

Voorbeeld 3.3B

Een gelmonster laten drogen

Voor een droogproef met een gelmonster zijn meetwaarden samengesteld voor de oefening. Na 2 uur is de massa 84 g; na 5 uur is de massa 66 g. Een lineair model wordt voorlopig gebruikt voor $2 \le t \le 10$ uur, zolang de droogomstandigheden gelijk blijven.

b Welke massa geeft de doorgetrokken lijn na 18 uur? Beoordeel of die uitkomst bruikbaar is als voorspelling van de werkelijke massa.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de rekenuitkomst bij 18 uur en wil daarna beoordelen of die nog bij het monster en het model past.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik eerst dezelfde afname om zichtbaar te maken wat verlengen oplevert. Daarna controleer ik de afstand tot de gegevens, het modeldomein en de grens dat massa niet negatief kan zijn.

3. Berekening

$m = 66 - 6 \times (18 - 5) = 66 - 78 = -12$ g. Het tijdstip ligt $18 - 5 = 13$ uur na de laatste meting.

4. Antwoord in context

De lijn geeft −12 g, maar dat is geen bruikbare werkelijke massa. 18 uur ligt buiten het modeldomein van 2 tot 10 uur en een massa kan niet negatief zijn.

5. Controle

De lijn zou al bij $t = 16$ uur nul geven, want $66 \div 6 = 11$ uur na uur 5. Ook dat ligt buiten het domein. Het rekenkundige nulpunt bepaalt dus niet wanneer het gelmonster werkelijk droog is.

Voorbeeld 3.4A

Een vervoerswijze kiezen

Een atelier schat de totale tijd voor het voorbereiden en vervoeren van gelijke kratten met Q = 18 + 0,6n en S = 30 + 0,4n. n is het gehele aantal kratten, van 0 tot en met 100. De tijd staat in minuten. Beide modellen veronderstellen dezelfde route en dezelfde inhoud per krat.

a Vergelijk beginwaarden en toenamen. Kies voor 80 kratten het model met de kortste voorspelde tijd en onderbouw de keuze.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de beginwaarde en tijd per extra krat van elk model en de snelste voorspelling bij 80 kratten.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De vraag noemt een vast aantal kratten. Daarom vergelijk ik de parameters en vul ik in beide modellen n = 80 in, in plaats van alleen het startbedrag te bekijken.

3. Berekening

Q begint bij 18 minuten en neemt met 0,6 minuut per krat toe; S begint bij 30 en neemt met 0,4 toe. Q(80) = 18 + 0,6 × 80 = 66; S(80) = 30 + 0,4 × 80 = 62. Het verschil is 66 − 62 = 4 minuten.

4. Antwoord in context

Kies S: het voorspelt voor 80 kratten 62 minuten, 4 minuten minder dan Q.

5. Controle

80 ligt binnen beide domeinen. Controle via het verschil: Q − S = −12 + 0,2n, dus bij n = 80 is het verschil −12 + 16 = 4 minuten. Dat bevestigt de keuze; de uitkomst is een schatting onder de gegeven voorwaarden.

Voorbeeld 3.4B

Lijmverbruik aanpassen en controleren

Een atelier schat het lijmverbruik voor gelijke pakketjes met $l = 14 + 0{,}3n$. l is het totale verbruik in gram en n het gehele aantal pakketjes, van 0 tot en met 120. Een gewijzigde werkwijze heeft 10 gram beginverbruik en 0,35 gram per extra pakketje. Beide modellen gelden voor hetzelfde materiaal en dezelfde maat pakketjes.

a Schrijf het gewijzigde model en voorspel de verandering bij 40 en bij 100 pakketjes.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek het nieuwe model en het verschil in lijmverbruik voor twee aantallen pakketjes.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Er veranderen twee parameters. Daarom bereken ik eerst beide veranderingen; het totale verschil is verandering beginwaarde + $n \times$ verandering per pakketje.

3. Berekening

$l_{nieuw} = 10 + 0{,}35n$. Nieuw − oud = $(10 - 14) + (0{,}35 - 0{,}3)n = -4 + 0{,}05n$. Bij 40 is dit −2 gram; bij 100 is dit 1 gram.

4. Antwoord in context

Bij 40 pakketjes voorspelt de nieuwe werkwijze 2 gram minder lijm; bij 100 pakketjes voorspelt zij 1 gram meer.

5. Controle

Bij 40: oud 26 gram en nieuw 24 gram. Bij 100: oud 44 gram en nieuw 45 gram. Beide aantallen vallen binnen 0 tot en met 120. De lagere beginwaarde garandeert dus geen lager totaalverbruik bij ieder aantal.

Voorbeeld 3.4B

Lijmverbruik aanpassen en controleren

Een atelier schat het lijmverbruik voor gelijke pakketjes met $l = 14 + 0{,}3n$. l is het totale verbruik in gram en n het gehele aantal pakketjes, van 0 tot en met 120. Een gewijzigde werkwijze heeft 10 gram beginverbruik en 0,35 gram per extra pakketje. Beide modellen gelden voor hetzelfde materiaal en dezelfde maat pakketjes.

n (pakketjes)	Controleverbruik (gram)
20	17,1
60	31,8
100	48,0

b De tabel bevat samengestelde controlewaarden voor de nieuwe werkwijze. Er is maximaal 1 gram afwijking toegestaan bij iedere controle. Beoordeel dit model en de onderbouwing voor gebruik bij 140 pakketjes.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek of alle controlewaarden binnen 1 gram van de voorspelling liggen en of 140 pakketjes binnen het onderbouwde domein valt.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vergelijk iedere controlewaarde met $l_{nieuw} = 10 + 0{,}35n$ en gebruik de absolute afwijking, omdat zowel te hoge als te lage controlewaarden tellen. Het domein beoordeel ik apart.

3. Berekening

Voor 20, 60 en 100 pakketjes voorspelt het model 17, 31 en 45 gram. De absolute afwijkingen zijn 0,1, 0,8 en 3,0 gram. Bij 100 pakketjes is 3,0 groter dan 1. Bovendien is 140 groter dan de domeingrens 120.

4. Antwoord in context

Het nieuwe model voldoet niet aan de afspraak voor alle controlewaarden. Gebruik bij 140 pakketjes is met deze informatie niet onderbouwd.

5. Controle

De afwijkingen zijn in dezelfde eenheid, gram, vergeleken. De eerste twee voldoen; de derde niet. De grensoverschrijding staat los van die afwijking. Zonder extra informatie is geen oorzaak van het verschil vastgesteld.