Uitwerkingen · Wat weet je nog?

V1 Rekenvolgorde en negatieve getallen

a Aanpak: vermenigvuldig voordat je aftrekt.

$3 \times 4 = 12$. Daarna $7 - 12 = -5$.

Antwoord De uitkomst is -5.

b Aanpak: bepaal eerst het teken van het product.

Het product van twee negatieve getallen is positief: $(-3) \times (-5) = 15$. Daarna $15 + 2 = 17$.

Antwoord De uitkomst is 17.

c Aanpak: onderscheid het teken van de factoren van een minteken vóór een berekening.

$(-2) \times (-2) = 4$. In $-(2 \times 2)$ bereken je eerst $2 \times 2 = 4$ en neem je daarna het tegengestelde: -4.

Antwoord De uitkomsten zijn 4 en -4. Twee negatieve factoren geven een positief product; het tegengestelde van 4 is -4.

V2 Een letter in een berekening

a Aanpak: aftrekken van een negatief getal betekent het bijbehorende positieve getal optellen.

$5 - (-2) - 6 = 5 + 2 - 6 = 1$.

Antwoord De uitkomst is 1.

b Aanpak: herken de letter en neem het teken van elke term mee. Vul daarna $p = -2$ in.

De variabele is p. De termen zijn $4p$, -3 en $2p$.

$4 \times (-2) - 3 + 2 \times (-2) = -8 - 3 - 4 = -15$.

Antwoord De variabele is p, de termen zijn $4p$, -3 en $2p$, en de waarde bij $p = -2$ is -15.

V3 Negatieve getallen

a Aanpak: reken de optellingen en aftrekkingen van links naar rechts uit.

$-7 + 12 = 5$ en $5 - 4 = 1$.

Antwoord $-7 + 12 - 4 = 1$.

b Aanpak: het aftrekken van een negatief getal is hetzelfde als het optellen van het tegengestelde getal.

$6 - (-3) = 6 + 3 = 9$.

Antwoord $6 - (-3) = 9$.

V4 Rekenvolgorde

a Aanpak: voer de vermenigvuldiging uit vóór de aftrekking.

$3 \times 5 = 15$, dus $24 - 15 = 9$.

Antwoord $24 - 3 \times 5 = 9$.

b Aanpak: bereken eerst wat tussen haakjes staat en de macht, daarna de deling en tot slot de optelling.

$18 + 6 = 24$ en $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

$24 \div 4 + 8 = 6 + 8 = 14$.

Antwoord $(18 + 6) \div 4 + 2^3 = 14$.

V5 Breuken optellen en vermenigvuldigen

a Aanpak: maak de noemers gelijk voordat je de breuken optelt.

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ en $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

$\frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$. De teller en noemer hebben geen gemeenschappelijke deler groter dan 1.

Antwoord $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.

b Aanpak: vermenigvuldig de tellers met elkaar en de noemers met elkaar. Vereenvoudig daarna de breuk.

$\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{15}{60}$.

Deel de teller en noemer door 15: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

Antwoord $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$.

V6 Breuken aftrekken en delen

a Aanpak: maak de noemers gelijk voordat je de breuken aftrekt.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, dus $\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

Antwoord $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.

V6 Breuken aftrekken en delen (vervolg)

b Aanpak: delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$\frac{3}{5} \div \frac{9}{10} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45}$.

Deel de teller en noemer door 15: $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Antwoord $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10} = \frac{2}{3}$.

V7 Machten en wortels van getallen

a Aanpak: bereken de machten voordat je optelt. De haakjes geven aan dat het hele getal –3 wordt gekwadrateerd.

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ en $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

$9 + 8 = 17$.

Antwoord $(-3)^2 + 2^3 = 17$.

b Aanpak: bepaal eerst de niet-negatieve vierkantswortels en trek daarna af.

$\sqrt{81} = 9$, want $9^2 = 81$. $\sqrt{16} = 4$, want $4^2 = 16$.

$9 - 4 = 5$.

Antwoord $\sqrt{81} - \sqrt{16} = 5$.

V8 Invullen in een gegeven formule

a Aanpak: vervang h door 3 en voer de vermenigvuldiging uit vóór de optelling.

$K = 4 + 2{,}50 \times 3 = 4 + 7{,}50 = 11{,}50$.

Antwoord De huurkosten voor 3 uur zijn € 11,50.

b Aanpak: vervang h door 5 en voer de vermenigvuldiging uit vóór de optelling.

$K = 4 + 2{,}50 \times 5 = 4 + 12{,}50 = 16{,}50$.

Antwoord De huurkosten voor 5 uur zijn € 16,50.

V9 Liters en milliliters

a Aanpak: gebruik dat 1 liter gelijk is aan 1000 milliliter.

$1{,}8 \times 1000 = 1800$.

Antwoord De kan bevat 1800 milliliter sap.

V9 Liters en milliliters (vervolg)

b Aanpak: deel het aantal milliliters in de kan door 250. Tel alleen helemaal gevulde glazen en bereken vervolgens de rest.

1800 ÷ 250 = 7,2, dus er kunnen 7 glazen helemaal worden gevuld.

7 × 250 = 1750 milliliter. Er blijft 1800 − 1750 = 50 milliliter over.

Antwoord Je kunt 7 glazen helemaal vullen. Daarna blijft 50 milliliter sap over.

V10 Kosten en wisselgeld

Artikel	Prijs per stuk in euro
Rol papier	2,75
Set stiften	4,60

a Aanpak: vermenigvuldig de prijs van een rol papier met 3 en tel de prijs van een set stiften erbij op.

3 × 2,75 = 8,25.

8,25 + 4,60 = 12,85.

Antwoord Het totaalbedrag is € 12,85.

b Aanpak: trek het totaalbedrag van de aankoop af van het betaalde bedrag.

20,00 − 12,85 = 7,15.

Antwoord Je krijgt € 7,15 wisselgeld.

Uitwerkingen

Paragraaf 4.1 · opgaven 1–18

Haakjes wegwerken

1 Elk teken telt

a Aanpak: vermenigvuldig elke term in het eerste paar haakjes met 3 en elke term in het tweede paar met −2.

$3(2x - 5) - 2(x + 4) = 6x - 15 - 2x - 8$.

$6x - 2x = 4x$ en $-15 - 8 = -23$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $4x - 23$.

b Aanpak: vul dezelfde waarde in beide vormen in en vergelijk de uitkomsten.

Links: $3(4 - 5) - 2(2 + 4) = -3 - 12 = -15$. Rechts: $4 \times 2 - 7 = 1$.

De verschillende uitkomsten zijn een tegenvoorbeeld: de vormen zijn niet voor alle x gelijk. Gelijke uitkomsten bij één waarde zouden alleen gelijkheid bij die waarde aantonen.

Antwoord De herschrijving is onjuist, want $-15 \neq 1$. Een geslaagde invulcontrole is geen bewijs voor alle waarden; een geldige algebraïsche herschrijving kan dat wel leveren.

2 Twee paar haakjes

a Aanpak: vermenigvuldig x en 4 elk met x en met −2.

De vier producten zijn x^2, $-2x$, $4x$ en -8.

$(x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $x^2 + 2x - 8$.

b Aanpak: het minteken vóór het hele product is een factor −1 en verandert het teken van alle termen in het uitgewerkte product.

$(a - 3)(a + 2) = a^2 + 2a - 3a - 6 = a^2 - a - 6$.

$-(a^2 - a - 6) = -a^2 + a + 6$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $-a^2 + a + 6$.

3 Zelf haakjes wegwerken

a Aanpak: verdeel beide factoren over de termen tussen hun haakjes.

$-4(3x - 2) + 5(x + 1) = -12x + 8 + 5x + 5 = -7x + 13$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $-7x + 13$.

b Aanpak: vermenigvuldig elke term van het eerste paar haakjes met elke term van het tweede paar.

$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $2x^2 + 5x - 12$.

c Aanpak: werk beide producten uit en trek daarna het volledige tweede resultaat af.

$2x(x - 5) = 2x^2 - 10x$. Verder $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$.

$2x^2 - 10x - (x^2 + x - 6) = 2x^2 - 10x - x^2 - x + 6 = x^2 - 11x + 6$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $x^2 - 11x + 6$.

4 Pakketten met korting

a Aanpak: vermenigvuldig de pakketprijs met zeven en trek de hele korting af.

$K = 7(2n + 5) - 3(n - 4)$. De min bij de korting werkt ook op de term -4.

$K = 14n + 35 - 3n + 12 = 11n + 47$.

Antwoord De totale kosten zijn $K = 11n + 47$ euro.

b Aanpak: bereken de bestelling en de voorgestelde formule bij $n = 6$; bewijs daarna de correcte herschrijving met algebra.

De oorspronkelijke bestelling kost $7(12 + 5) - 3(6 - 4) = 119 - 6 = 113$ euro. P geeft $11 \times 6 + 23 = 89$ euro. Dit verschil is een tegenvoorbeeld.

De juiste distributieve stappen geven $7(2n + 5) - 3(n - 4) = 14n + 35 - 3n + 12 = 11n + 47$. Deze regels gelden voor elke n, dus ook voor alle gehele $n \geq 4$.

Antwoord De formule van de penningmeester is onjuist: bij zes deelnemers is het bedrag 113 euro, geen 89 euro. De correcte formule $K = 11n + 47$ is voor elke toegestane n equivalent.

Gelijksoortige termen

5 Termen met hetzelfde letterdeel

a Aanpak: combineer alleen termen met hetzelfde letterdeel en neem hun tekens mee.

$(5x - 2x) + (3y - y) + (4 - 9) = 3x + 2y - 5$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $3x + 2y - 5$.

5 Termen met hetzelfde letterdeel (vervolg)

b Aanpak: houd p^2-termen en p-termen apart, omdat hun letterdelen verschillen.

De p^2-termen zijn $4p^2$, $3p^2$ en $-8p^2$; samen zijn ze $-p^2$. De p-termen zijn $-p$, $6p$ en p; samen zijn ze $6p$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $-p^2 + 6p$.

6 Letterdelen vergelijken

a Aanpak: voeg a-termen, b-termen en getallen afzonderlijk samen.

$7a - 5a = 2a$ en $-2b + 6b = 4b$; het getal -3 blijft staan.

Antwoord De herleide uitdrukking is $2a + 4b - 3$.

b Aanpak: groepeer op letterdeel.

$3x^2 - 5x^2 = -2x^2$, $-4x + 9x = 5x$ en $6 - 1 = 5$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $-2x^2 + 5x + 5$.

c Aanpak: ab en ba zijn hetzelfde letterdeel, omdat de volgorde van vermenigvuldigen de uitkomst niet verandert.

$2ab + 5ba - ab = (2 + 5 - 1)ab = 6ab$. Verder $-3a + a = -2a$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $6ab - 2a$.

7 Kiezen en terugredeneren

a Aanpak: tel de coëfficiënten van gelijksoortige termen op.

$3p + 5p = 8p$ en $-2q + 7q = 5q$. De p-termen en q-termen kun je niet verder samenvoegen.

Antwoord Keuze 1, $8p + 5q$, is equivalent.

b Aanpak: vergelijk de coëfficiënten na het samenvoegen van gelijksoortige termen.

De linkerkant is $(7 + k)x^2 + 2x$. De x-term klopt al; voor de x^2-term moet $7 + k = 2$ gelden.

Daarom is $k = -5$.

Antwoord $k = -5$. Dan zijn beide vormen gelijk aan $2x^2 + 2x$.

c Aanpak: a en b zijn verschillende letterdelen. Zoek waarden waarbij de twee vormen verschillende uitkomsten geven.

Neem $a = 1$ en $b = 2$. Links krijg je $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$; rechts $5 \times 1 \times 2 = 10$.

De som van verschillende lettertermen kun je niet vervangen door één productterm.

Antwoord Nee. Het tegenvoorbeeld geeft $8 \neq 10$; $2a + 3b$ blijft als som staan.

Alternatief: Andere waarden met $2a + 3b \neq 5ab$ leveren ook een correct tegenvoorbeeld.

8 Overlappende decorstukken

a Aanpak: bereken A + B − O en groepeer daarna op letterdeel.

$T = 5x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x^2 - xy + 6y^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

De x^2-termen geven $6x^2$; de xy-termen geven $(3 - 1 - 2)xy = 0$; de y^2-termen geven $9y^2$.

Antwoord De benodigde oppervlakte is $T = 6x^2 + 9y^2$ dm^2. De xy-termen vallen weg.

b Aanpak: x^2 en y^2 zijn verschillende letterdelen; de coëfficiënten mogen niet tot één productterm worden opgeteld.

De correcte vorm geeft $T = 6 \times 2^2 + 9 \times 3^2 = 24 + 81 = 105$ dm^2.

De voorgestelde vorm zou $15 \times 4 \times 9 = 540$ geven en hoort dus niet bij dit oppervlaktemodel.

Antwoord De benodigde materiaaloppervlakte is 105 dm^2. De vorm $15x^2y^2$ is onjuist omdat niet-gelijksoortige termen tot een product zijn gemaakt.

Een factor buiten haakjes

9 Een factor terugvinden

a Aanpak: zoek een getal dat een factor van zowel 12 als 18 is; bijvoorbeeld 6.

$12x = 6 \times 2x$ en $18 = 6 \times 3$. Daarom $12x + 18 = 6(2x + 3)$.

Controle: $6(2x + 3) = 12x + 18$.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $6(2x + 3)$.

Alternatief: $3(4x + 6)$ en $2(6x + 9)$ zijn ook correct.

b Aanpak: beide termen bevatten p; daarnaast is 4 een gemeenschappelijke getalfactor.

$8p^2 = 4p \times 2p$ en $-12p = 4p \times (-3)$. Dus $8p^2 - 12p = 4p(2p - 3)$.

Controle: $4p(2p - 3) = 8p^2 - 12p$.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $4p(2p - 3)$.

Alternatief: $2p(4p - 6)$, $p(8p - 12)$ en $-4p(3 - 2p)$ zijn ook correct.

10 Zelf een factor kiezen

a Aanpak: 5 komt als getalfactor in beide termen voor.

$15a - 25b = 5(3a - 5b)$. Uitvermenigvuldigen geeft weer $15a - 25b$.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $5(3a - 5b)$.

Alternatief: $-5(5b - 3a)$ is ook correct.

10 Zelf een factor kiezen (vervolg)

b Aanpak: alle termen bevatten x en hun getalfactoren zijn deelbaar door 3.

$6x^2 + 9xy - 3x = 3x(2x + 3y - 1)$.

Controle: $3x \times 2x = 6x^2$, $3x \times 3y = 9xy$ en $3x \times (-1) = -3x$.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $3x(2x + 3y - 1)$.

Alternatief: $x(6x + 9y - 3)$ en $-3x(1 - 2x - 3y)$ zijn ook correct.

c Aanpak: beide termen bevatten uv en hebben de gemeenschappelijke getalfactor 5.

$10uv - 15u^2v = 5uv(2 - 3u)$. Uitvermenigvuldigen geeft de oorspronkelijke termen terug.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $5uv(2 - 3u)$.

Alternatief: $uv(10 - 15u)$ en $-5uv(3u - 2)$ zijn ook correct.

11 De buitenfactor ligt vast

a Aanpak: zoek de termen die bij vermenigvuldiging met 6x de oorspronkelijke termen geven.

$6x \times x = 6x^2$ en $6x \times 3 = 18x$.

Antwoord Tussen de haakjes komt $x + 3$; de ontbinding is $6x(x + 3)$.

b Aanpak: werk eerst uit en kies vervolgens bijvoorbeeld 4p als buitenfactor.

$-4p(2p - 3) = -8p^2 + 12p = 4p(-2p + 3)$.

Antwoord Zonder haakjes is de uitdrukking $-8p^2 + 12p$. Een product met een positieve getalfactor is $4p(3 - 2p)$.

Alternatief: $2p(6 - 4p)$ en $p(12 - 8p)$ zijn ook correct.

c Aanpak: bepaal voor elke buitenfactor welke binnentermen de oorspronkelijke termen opleveren.

Met 3a krijg je $3a(2a - 3)$. Met 6a krijg je $6a(a - 1{,}5)$, met de niet-gehele coëfficiënt 1,5. Met $6a^2$ zou de tweede binnenterm een letter a in de noemer bevatten.

Alleen 3a geeft binnentermen met gehele coëfficiënten en zonder letter in de noemer.

Antwoord Kies 3a; de ontbinding is $3a(2a - 3)$.

12 Etiketten op vellen

a Aanpak: kies de capaciteit 3n van één vel als gemeenschappelijke factor.

$6n^2 + 15n = 3n(2n + 5)$, omdat $3n \times 2n = 6n^2$ en $3n \times 5 = 15n$.

De factor 3n is het aantal etiketten per vel; de factor $2n + 5$ is het aantal vellen.

Antwoord Het atelier heeft $2n + 5$ vellen met 3n etiketten nodig.

12 Etiketten op vellen (vervolg)

b Aanpak: gebruik bij elke velgrootte de capaciteit als buitenfactor.

Voor de kleinere vellen geldt $6n^2 + 15n = n(6n + 15)$. Bij $n = 4$ zijn daarvoor $6 \times 4 + 15 = 39$ vellen nodig.

Voor de grotere vellen zijn $2 \times 4 + 5 = 13$ vellen nodig. Controle: $39 \times 4 = 156$ en $13 \times 12 = 156$ etiketten.

Antwoord Bij $n = 4$ zijn 13 vellen met 12 etiketten of 39 vellen met 4 etiketten nodig. De grotere vellen vragen het kleinste aantal vellen; beide leveren 156 etiketten.

Gelijkwaardigheid controleren

13 Controleren en bewijzen

a Aanpak: zoek met de opgegeven waarde een tegenvoorbeeld en werk daarna het oorspronkelijke product geldig uit.

Voor $x = 2$ is links $(2 - 4)(2 + 1) = -6$ en rechts $4 - 6 + 4 = 2$. Dus de voorgestelde gelijkheid geldt niet voor alle x.

Uitvermenigvuldigen: $(x - 4)(x + 1) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$. Hier worden alle termen vermenigvuldigd en daarna gelijksoortige termen samengevoegd.

Antwoord De voorgestelde herschrijving is onjuist. De juiste, voor alle x equivalente vorm is $x^2 - 3x - 4$.

b Aanpak: onderscheid invulcontroles van een herschrijving die voor elke waarde geldig is.

Voor $x = 0$ geven beide vormen 6; voor $x = 5$ geven beide vormen 11. Daarmee zijn alleen deze twee waarden gecontroleerd.

Met de distributieve eigenschap en het samenvoegen van gelijksoortige termen volgt $2(x + 3) - x = 2x + 6 - x = x + 6$.

Antwoord De twee invulcontroles vormen geen bewijs voor alle x. De vormen zijn wel equivalent; de geldige herschrijving bewijst dat.

14 Wanneer is een controle genoeg?

a Aanpak: twee geslaagde controles zeggen niets over nog niet gecontroleerde waarden. Zoek een tegenvoorbeeld.

Bij $x = 2$ is $A = 2^2 + 2 = 6$ en $B = 2 \times 2 = 4$.

Antwoord De vormen zijn niet equivalent, want bij $x = 2$ geven ze 6 en 4.

Alternatief: Elke andere waarde dan 0 en 1 geeft hier een correct tegenvoorbeeld.

14 Wanneer is een controle genoeg? (vervolg)

b Aanpak: bewijs de gelijkheid met geldige regels en gebruik de invulcontrole als aanvullende controle.

Distributief werken en de factor −1 verwerken geeft $3(x - 2) - (2x - 5) = 3x - 6 - 2x + 5$. Gelijksoortige termen samenvoegen geeft $x - 1$.

Bij $x = -3$ is links $3(-5) - (-11) = -15 + 11 = -4$. Rechts is $-3 - 1 = -4$.

Antwoord De gelijkheid geldt voor alle x door de geldige herschrijving. Bij $x = -3$ geven beide vormen −4.

15 Offertes vergelijken

a Aanpak: vul $n = 3$ in beide oorspronkelijke offertes in.

$A = 4(9 + 2) - 6 = 44 - 6 = 38$ euro. $B = 2(15 + 4) = 38$ euro.

Deze controle toont gelijkheid voor $n = 3$, maar bewijst geen gelijkheid voor andere aantallen.

Antwoord Beide offertes zijn voor drie houders 38 euro. Alleen bij dit aantal is de gelijkheid hiermee gecontroleerd.

b Aanpak: herleid beide offertes met geldige regels tot dezelfde vorm.

$A = 4(3n + 2) - 2n = 12n + 8 - 2n = 10n + 8$.

$B = 2(5n + 4) = 10n + 8$. Deze distributieve herschrijvingen en het samenvoegen van n-termen gelden voor elke n.

Antwoord De offertes zijn voor elk positief geheel aantal houders gelijk: beide bedragen zijn $10n + 8$ euro.

c Aanpak: zoek een toegestaan aantal dat de vermeende gelijkheid weerlegt.

Bij $n = 2$ rekent A $10 \times 2 + 8 = 28$ euro, terwijl C $13 \times 2 + 5 = 31$ euro rekent.

Antwoord Nee. Bij twee houders zijn de bedragen 28 euro en 31 euro; dit is een tegenvoorbeeld.

Alternatief: Elk positief geheel n groter dan 1 levert hier een correct tegenvoorbeeld.

16 Fouten opsporen

a Aanpak: controleer eerst het wegwerken van de haakjes, vóór je het samenvoegen beoordeelt.

De eerste fout staat in regel 1: $-(3x - 4) = -3x + 4$. De factor −1 verandert ook het teken van −4.

Correct is $-(3x - 4) + 2(x - 1) = -3x + 4 + 2x - 2 = -x + 2$. Regel 2 volgt wel uit de foutieve regel 1, maar herstelt de eerdere fout niet.

Antwoord De eerste fout is het teken van 4 in regel 1. De correcte uitkomst is $-x + 2$.

16 Fouten opsporen (vervolg)

b Aanpak: onderscheid optellen van termen van vermenigvuldigen van letterfactoren.

a en a^2 zijn verschillende letterdelen; $2a + 3a^2$ kan niet tot één term worden samengevoegd. Bij een som tel je de exponenten niet op.

Voor $a = 2$ is links $2 \times 2 + 3 \times 2^2 = 4 + 12 = 16$, terwijl rechts $5 \times 2^3 = 40$.

Antwoord De som blijft $2a + 3a^2$. De voorgestelde herschrijving is onjuist; het tegenvoorbeeld geeft $16 \neq 40$.

Alternatief: Elke waarde waarvoor $2a + 3a^2 \neq 5a^3$ is een correct tegenvoorbeeld.

17 Zelftest 1

a Aanpak: werk de producten uit en verwerk het aftrekken van het tweede product.

$(2x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$.

$(2x^2 - 7x + 3) - (x^2 + 2x) = x^2 - 9x + 3$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $x^2 - 9x + 3$.

b Aanpak: zoek een gemeenschappelijke getalfactor en letterfactor.

Beide termen bevatten ab; 6 is een gemeenschappelijke getalfactor. Daarom $12a^2b - 18ab^2 = 6ab(2a - 3b)$.

Antwoord Een mogelijke ontbinding is $6ab(2a - 3b)$.

Alternatief: $3ab(4a - 6b)$, $ab(12a - 18b)$ en $-6ab(3b - 2a)$ zijn ook correct.

18 Zelftest 2

a Aanpak: combineer alleen termen met hetzelfde letterdeel.

$5u^2 - 2u^2 = 3u^2$, $-3uv + 7uv = 4uv$ en $2v^2 - 6v^2 = -4v^2$.

Antwoord De herleide uitdrukking is $3u^2 + 4uv - 4v^2$.

b Aanpak: vergelijk bij één waarde en herleid de linkerkant om de bewering algebraïsch te beoordelen.

Bij $x = 0$ is links $-2(-5) = 10$ en rechts 5. Dit is een tegenvoorbeeld.

De geldige herschrijving is $-2(x - 5) + 3x = -2x + 10 + 3x = x + 10$.

Antwoord De bewering is onjuist: bij $x = 0$ is $10 \neq 5$. De linkerkant is voor alle x equivalent aan $x + 10$.

Alternatief: Elke andere reële invulwaarde levert eveneens een tegenvoorbeeld, want de uitkomsten verschillen altijd 5.

Uitwerkingen

Paragraaf 4.2 · opgaven 1–18

Factoren wegstrepen

1 Eerst de factoren

a De teller is $6x(x + 3)$ en de noemer is $9x$.

De oorspronkelijke noemer is nul bij $x = 0$. Werk dus met $x \neq 0$.

$\frac{6x(x + 3)}{9x} = \frac{2(x + 3)}{3}$, doordat je teller en noemer door $3x$ deelt.

Antwoord De herleide breuk is $\frac{2(x + 3)}{3}$ voor $x \neq 0$.

Alternatief: Je kunt eerst teller en noemer door 3 delen en daarna door x. Beide delingen zijn toegestaan als $x \neq 0$.

b $9x = 0$ geeft $x = 0$; deze waarde is uitgesloten.

Bij $x = 3$ is de oorspronkelijke breuk $\frac{6 \times 9 + 18 \times 3}{9 \times 3} = \frac{108}{27} = 4$.

De herleide vorm geeft $\frac{2(3 + 3)}{3} = 4$.

Antwoord $x \neq 0$. De controle bij $x = 3$ geeft in beide vormen 4.

2 Herkennen en herleiden

a De oorspronkelijke noemer $4y$ vereist $y \neq 0$.

$8y^2 - 12y = 4y(2y - 3)$.

$\frac{4y(2y - 3)}{4y} = 2y - 3$.

Antwoord $2y - 3$, met $y \neq 0$.

Alternatief: Deel beide termen in de teller afzonderlijk door $4y$: $2y - 3$. Ook dan blijft $y \neq 0$ gelden.

2 Herkennen en herleiden (vervolg)

b De noemer is nul bij $z = 5$, dus $z \neq 5$.

$5 - z = -(z - 5)$.

$\frac{-(z-5)}{z-5} = -1$.

Antwoord -1, met $z \neq 5$.

Alternatief: Bijvoorbeeld $z = 6$ geeft -1. De identiteit $5 - z = -(z - 5)$ bewijst het resultaat voor alle toegestane z.

c Bij $a = 1$ is de breuk $\frac{7}{4}$, dus niet 2.

In $a + 6$ en $a + 3$ staat a als term in een som. Het is geen factor van de hele teller en de hele noemer.

De oorspronkelijke breuk vereist $a \neq -3$.

Antwoord De bewering is onjuist: je mag termen in een som niet wegstrepen. Bij $a = 1$ is de waarde $\frac{7}{4}$.

3 Twee formules vergelijken

a De noemer van f is $x - 5$, dus $x \neq 5$.

$2x^2 - 10x = 2x(x - 5)$.

Daarom is $f(x) = 2x$ voor $x \neq 5$. $g(x) = 2x$ is voor elke reële x gedefinieerd.

Antwoord $f(x) = 2x$ voor $x \neq 5$. De twee formules geven dezelfde uitkomst bij alle reële x behalve $x = 5$.

b Bij $x = 5$ is de oorspronkelijke noemer van f nul. Ook de teller is dan nul, maar delen door nul is niet toegestaan.

Het wegstrepen van $x - 5$ was alleen toegestaan als $x - 5 \neq 0$.

$g(5) = 2 \times 5 = 10$.

Antwoord $f(5)$ bestaat niet; $g(5) = 10$. Herleiden maakt een uitgesloten waarde niet alsnog toegestaan.

4 Materiaal per set

a $12q^2 + 60q = 3q(4q + 20)$.

De breuk $\frac{3q(4q + 20)}{3q}$ wordt $4q + 20$ door de factor $3q$ weg te strepen.

Dit is toegestaan voor $q \neq 0$.

Antwoord $C(q) = 4q + 20$ euro per set, in dit model voor positieve gehele q.

Alternatief: Je kunt beide termen in de teller apart door $3q$ delen: $4q + 20$.

b De noemer $3q$ is nul bij $q = 0$. Algebraïsch is de voorwaarde $q \neq 0$.

In de context telt q series: $q = 1, 2, 3, \ldots$.

Bij $q = 0$ zijn er geen sets. De oorspronkelijke berekening van uitgave per set deelt dan door nul.

Antwoord Algebraïsch is $q = 0$ uitgesloten; in het model zijn alleen positieve gehele q toegestaan. $C(0)$ bestaat niet in dit model, ook al geeft $4q + 20$ bij $q = 0$ een getal.

c $C(5) = 4 \times 5 + 20 = 40$ euro per set.

$C(q + 1) = 4(q + 1) + 20 = 4q + 24$.

$C(q + 1) - C(q) = 4$ euro per set.

Antwoord Bij vijf series is de uitgave 40 euro per set. Elke extra serie verhoogt de uitgave per set met 4 euro.

Alternatief: $C(6) = 44$ euro geeft een verschil van 4 euro; de algemene formule bewijst dat dit bij elke positieve gehele q zo is.

Gelijknamige breuken

5 Een noemer kiezen

a $x \neq 0$, omdat beide oorspronkelijke noemers anders nul zijn.

$\frac{3}{2x} = \frac{9}{6x}$.

$\frac{9}{6x} + \frac{5}{6x} = \frac{14}{6x} = \frac{7}{3x}$.

Antwoord $\frac{7}{3x}$, met $x \neq 0$.

Alternatief: Met $12x$ als gemeenschappelijke noemer krijg je $\frac{28}{12x}$; na vereenvoudigen volgt dezelfde uitkomst.

5 Een noemer kiezen (vervolg)

b De voorwaarden zijn $x \neq 2$ en $x \neq 0$.

$\frac{4}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{4x - (x-2)}{x(x-2)}$.

De teller is $4x - x + 2 = 3x + 2$. Het minteken vóór de haakjes verandert beide tekens.

Antwoord $\frac{3x+2}{x(x-2)}$, met $x \neq 0$ en $x \neq 2$.

6 Som en verschil

a $x \neq 0$ en $x \neq -3$.

Een gemeenschappelijke noemer is $x(x+3)$.

$\frac{5(x+3)+2x}{x(x+3)} = \frac{7x+15}{x(x+3)}$.

Antwoord $\frac{7x+15}{x(x+3)}$, met $x \neq 0$ en $x \neq -3$.

b $x \neq 0$.

Bij de eerste breuk vermenigvuldig je teller en noemer met 2.

$\frac{2(2x-1)-(x+3)}{2x} = \frac{4x-2-x-3}{2x} = \frac{3x-5}{2x}$.

Antwoord $\frac{3x-5}{2x}$, met $x \neq 0$.

7 Ook het losse getal

a $u \neq -1$.

Schrijf 1 als $\frac{u+1}{u+1}$.

$\frac{(u+1)-(2u+1)}{u+1} = \frac{-u}{u+1}$.

Antwoord $\frac{-u}{u+1}$, met $u \neq -1$.

Alternatief: Eerst $\frac{2u+1}{u+1} = 2 - \frac{1}{u+1}$ schrijven geeft $-1 + \frac{1}{u+1}$, dezelfde breuk.

7 Ook het losse getal (vervolg)

b $v \neq 1$.

Schrijf ook 1 met noemer $v - 1$.

$\frac{2 + (v + 1) - (v - 1)}{v - 1} = \frac{4}{v - 1}$.

Bij $v = 2$ is de uitkomst 4; bij $v = 3$ is de uitkomst 2.

Antwoord De uitkomst is $\frac{4}{v - 1}$ voor $v \neq 1$. De twee toegestane invulwaarden leveren verschillende uitkomsten, dus er is geen vaste waarde.

8 Dezelfde voorraad verdelen

a Bij de eerste verdeling is de inhoud per doos $\frac{84}{n}$ kg; bij de tweede $\frac{84}{n + 4}$ kg.

Het verschil is $\frac{84}{n} - \frac{84}{n + 4} = \frac{84(n + 4) - 84n}{n(n + 4)}$.

De teller wordt 336. Algebraïsch moet $n \neq 0$ en $n \neq -4$; de context gebruikt positieve gehele n.

Antwoord Het verschil is $\frac{336}{n(n + 4)}$ kg per doos, voor positieve gehele n.

b Voor positieve n zijn n en $n + 4$ positief, dus $n(n + 4)$ is positief.

De teller 336 is positief. Het verschil eerste inhoud min tweede inhoud is daarom altijd positief.

Antwoord Nee. Een doos bevat bij de eerste verdeling altijd meer, omdat $\frac{336}{n(n + 4)} > 0$ voor positieve n.

Alternatief: Dezelfde 84 kg wordt over minder dozen verdeeld. Dat verklaart ook waarom de eerste inhoud groter is. De breuk onderbouwt dit voor alle toegestane n.

c Bij $n = 8$ is het verschil $\frac{336}{8 \times 12} = \frac{336}{96} = 3{,}5$.

Antwoord Het verschil is 3,5 kg per doos.

Alternatief: De twee inhouden zijn $84 \div 8 = 10{,}5$ kg en $84 \div 12 = 7$ kg; het verschil is 3,5 kg.

Vermenigvuldigen en omkeren

9 Product en deling

a De noemer 9a vereist $a \neq 0$.

$\frac{3a \times 4}{8 \times 9a} = \frac{12a}{72a}$.

Deel teller en noemer door 12a.

Antwoord $\frac{1}{6}$, met $a \neq 0$.

Alternatief: Je kunt vóór het vermenigvuldigen a tegen a, 4 tegen 8 en 3 tegen 9 vereenvoudigen.

b De deler $\frac{10b}{3}$ is nul als $b = 0$. Dus $b \neq 0$.

Vermenigvuldig met de omgekeerde tweede breuk: $\frac{5b}{6} \times \frac{3}{10b}$.

$\frac{15b}{60b} = \frac{1}{4}$.

Antwoord $\frac{1}{4}$, met $b \neq 0$.

c $3p \neq 0$ geeft $p \neq 0$. De deler $\frac{p+2}{6}$ is nul bij $p = -2$, dus ook $p \neq -2$.

$\frac{p+2}{3p} \times \frac{6}{p+2} = \frac{6(p+2)}{3p(p+2)}$.

Streep de factor $p + 2$ weg en deel 6 en 3 door 3.

Antwoord $\frac{2}{p}$, met $p \neq 0$ en $p \neq -2$.

10 Zelf een aanpak kiezen

a $t \neq 0$.

$\frac{126t}{12t^2} = \frac{21}{2t}$.

Van de twee factoren t in t^2 verdwijnt er één tegen de factor t in de teller.

Antwoord $\frac{21}{2t}$, met $t \neq 0$.

Alternatief: Vereenvoudig vooraf 18 tegen 12 tot 3 tegen 2 en t tegen t^2 tot 1 tegen t.

10 Zelf een aanpak kiezen (vervolg)

b De noemer 5x vereist $x \neq 0$. De deler is nul als $3x - 12 = 0$, dus $x \neq 4$.

$x^2 - 4x = x(x - 4)$ en $3x - 12 = 3(x - 4)$.

$\frac{x(x-4)}{5x} \times \frac{10}{3(x-4)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Antwoord $\frac{2}{3}$, met $x \neq 0$ en $x \neq 4$.

Alternatief: Herleid eerst de eerste breuk tot $\frac{x-4}{5}$ voor $x \neq 0$; deel daarna door de tweede breuk en behoud $x \neq 4$.

11 De bewerking maakt verschil

a De oorspronkelijke noemer $m + 1$ vereist $m \neq -1$.

$m^2 + m = m(m + 1)$.

$\frac{2m(m+1)}{6(m+1)} = \frac{m}{3}$.

Bij $m = 0$ zijn beide oorspronkelijke breuken gedefinieerd; de tweede breuk is nul en het product is nul.

Antwoord $\frac{m}{3}$ voor $m \neq -1$. $m = 0$ is toegestaan en geeft 0.

b De eerste noemer vereist $m \neq -1$.

De deler $\frac{m(m+1)}{6}$ is nul bij $m = 0$ en $m = -1$. Beide waarden zijn uitgesloten.

$\frac{2}{m+1} \times \frac{6}{m(m+1)} = \frac{12}{m(m+1)^2}$.

Antwoord $\frac{12}{m(m+1)^2}$ voor $m \neq 0$ en $m \neq -1$. $m = 0$ is nu verboden, omdat je dan door nul deelt.

12 Lak voor platen

a Aantal platen = voorraad ÷ verbruik per plaat.

$N(q) = \frac{18q}{q+2} \div \frac{3}{q+2} = \frac{18q}{q+2} \times \frac{q+2}{3} = 6q$.

Algebraïsch is $q \neq -2$ nodig; het verbruik per plaat is voor toegestane q nooit nul. In de context is q positief en geheel.

Antwoord Met de volledige voorraad kun je 6q platen lakken, voor positieve gehele q.

12 Lak voor platen (vervolg)

b Vermenigvuldig de voorraad met het gebruikte deel: $\frac{18q}{q+2} \times \frac{q+2}{6q}$.

Voor $q \neq 0$ en $q \neq -2$ kun je q en $q + 2$ wegstrepen. Er blijft $18 \div 6 = 3$ over.

Positieve gehele q voldoen aan beide voorwaarden. Het gebruikte deel is dan positief en niet groter dan 1.

Antwoord Er wordt steeds 3 liter gebruikt. In de herleide uitkomst komt q niet meer voor.

c $I(4) = \frac{72}{6} = 12$ liter. Na de proefplaten blijft $12 - 3 = 9$ liter over.

$V(4) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ liter per plaat.

Aantal platen $= 9 \div 0{,}5 = 18$.

Antwoord Met de resterende lak kun je 18 platen lakken.

Alternatief: Volledig zijn er $6 \times 4 = 24$ platen mogelijk. De 3 liter proeflak is goed voor $3 \div 0{,}5 = 6$ platen. Er blijven $24 - 6 = 18$ platen over.

13 Een pompmodel

a Volume = tijd × debiet.

$\frac{a+3}{2a} \times \frac{4a}{a+3} = \frac{4a(a+3)}{2a(a+3)} = 2$.

Algebraïsch moeten $a \neq 0$ en $a \neq -3$ zijn. In de context geldt $a > 0$.

Antwoord Het volume is steeds 2 m^3 en hangt binnen dit model niet af van de positieve instelling a.

b Tijd = volume ÷ debiet, dus $\frac{6}{1} \div \frac{4a}{a+3} = 6 \times \frac{a+3}{4a} = \frac{3(a+3)}{2a}$.

$3t(a) = 3 \times \frac{a+3}{2a} = \frac{3(a+3)}{2a}$.

De oorspronkelijke noemer en het niet-nul zijn van het debiet vereisen $a \neq -3$ en $a \neq 0$; $a > 0$ voldoet.

Antwoord De tijd is $\frac{3(a+3)}{2a}$ uur, voor $a > 0$. Dit is precies $3t(a)$.

Alternatief: Het debiet is constant en $t(a)$ hoort bij 2 m^3. Voor driemaal dat volume is driemaal de tijd nodig; de algebra bevestigt dit.

14 Een breuk en een verpakking

a De oorspronkelijke noemer vereist $k \neq 0$.

$15k^2 + 10k = 5k(3k + 2)$.

$\frac{5k(3k + 2)}{5k} = 3k + 2$.

Antwoord $3k + 2$, met $k \neq 0$.

b Beide oorspronkelijke noemers vereisen $r \neq 3$.

De deler is nul bij $r = 0$, dus $r \neq 0$.

$\frac{4r}{r - 3} \times \frac{r - 3}{2r^2} = \frac{2}{r}$.

Antwoord $\frac{2}{r}$, met $r \neq 0$ en $r \neq 3$.

c Aantal porties = totale massa ÷ massa per portie.

$\frac{10s}{s + 1} \div \frac{2}{s + 1} = \frac{10s}{s + 1} \times \frac{s + 1}{2} = 5s$.

Algebraïsch moet $s \neq -1$ zijn; de portiemassa is nooit nul bij toegestane s. De context gebruikt positieve gehele s, zodat $5s$ een positief geheel aantal is.

Antwoord De verpakking bevat $5s$ volledige porties, voor positieve gehele s.

Het toegestane domein

15 Waar ontstaat nul?

a $2t - 6 = 0$ geeft $2t = 6$ en dus $t = 3$.

Bij $t = 3$ zou je 7 door nul delen.

Antwoord Alle reële t behalve $t = 3$ zijn toegestaan: $t \neq 3$.

b De noemer $t - 4$ geeft $t \neq 4$. De noemer $t + 5$ geeft $t \neq -5$.

De deler is nul als $t - 2 = 0$, dus $t = 2$; bij $t = 2$ is de noemer $t + 5$ wel niet nul.

Ook $t = 2$ is daarom uitgesloten. Een nul in de teller van de eerste breuk, bij $t = -1$, is geen probleem.

Antwoord $t \neq 4$, $t \neq -5$ en $t \neq 2$. Alle andere reële t zijn toegestaan.

16 Voorwaarden blijven gelden

a $x^2 - x = x(x - 1)$, dus de oorspronkelijke noemer is nul bij $x = 0$ en $x = 1$.

Voor $x \neq 0$ en $x \neq 1$ wordt de breuk $\frac{1}{x}$.

Het wegstrepen van $x - 1$ was alleen toegestaan voor $x \neq 1$.

Antwoord $x = 0$ en $x = 1$ zijn uitgesloten. De herleide vorm is alleen gelijkwaardig met behoud van beide voorwaarden.

b $y = -2$ maakt de eerste noemer nul.

$y = 0$ maakt de noemer van de tweede breuk nul.

$y = -1$ maakt de deler nul; de noemer $3y$ is dan niet nul.

Antwoord $y \neq -2$, $y \neq 0$ en $y \neq -1$. De eerste twee uitsluitingen komen door oorspronkelijke noemers, de derde door een nulwaarde van de deler.

c De oorspronkelijke noemers geven $a \neq -4$ en $a \neq 0$.

Voor die waarden kun je herleiden tot $\frac{a - 2}{a + 4}$, maar $a = 0$ blijft uitgesloten.

Bij $a = 2$ zijn de oorspronkelijke noemers 6 en 2; beide zijn niet nul. De tweede breuk en dus het product zijn nul.

Antwoord $a \neq -4$ en $a \neq 0$. $a = 2$ is toegestaan en geeft 0; een nul in een teller mag bij vermenigvuldigen.

17 Drie uitwerkingen beoordelen

a x is een term in de teller, geen factor van de hele teller. Die x mag niet zomaar worden weggestreept.

Voor $x \neq 0$ geldt $\frac{x + 9}{x} = 1 + \frac{9}{x}$.

Bij $x = 3$ is de oorspronkelijke breuk $12 \div 3 = 4$, dus niet 9.

Antwoord Correct is $1 + \frac{9}{x}$ voor $x \neq 0$. De invulwaarde $x = 3$ weerlegt de fout.

b Je mag bij aftrekken niet de noemers van elkaar aftrekken. Eerst zijn gelijknamige breuken nodig.

Voor $x \neq 0$ en $x \neq 2$ is een gemeenschappelijke noemer $x(x - 2)$.

$\frac{x - (x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{2}{x(x - 2)}$.

Antwoord Correct is $\frac{2}{x(x - 2)}$, met $x \neq 0$ en $x \neq 2$.

17 Drie uitwerkingen beoordelen (vervolg)

c De oorspronkelijke noemer $x + 1$ vereist $x \neq -1$.

De deler $\frac{x - 3}{2}$ is nul bij $x = 3$, dus ook $x \neq 3$.

Voor deze toegestane waarden geeft vermenigvuldigen met $\frac{2}{x - 3}$ inderdaad $\frac{2}{x + 1}$.

Antwoord De herleide breuk is goed, maar de voorwaarden zijn onvolledig. Nodig zijn $x \neq -1$ en $x \neq 3$.

18 Verschil en domein

a $u \neq 0$ en $u \neq -5$.

$\frac{7(u + 5) - 2u}{u(u + 5)} = \frac{5u + 35}{u(u + 5)} = \frac{5(u + 7)}{u(u + 5)}$.

Antwoord $\frac{5(u + 7)}{u(u + 5)}$, met $u \neq 0$ en $u \neq -5$.

Alternatief: De vorm $\frac{5u + 35}{u(u + 5)}$ is ook correct: er is geen gemeenschappelijke factor met de noemer.

b $z = 6$ maakt de eerste noemer nul.

$2z + 8 = 0$ geeft $z = -4$; dit maakt de tweede noemer nul.

$z = 1$ maakt de tweede breuk nul, omdat $z - 1 = 0$ en $2z + 8$ dan 10 is.

Antwoord $z \neq 6$, $z \neq -4$ en $z \neq 1$. Alle andere reële z zijn toegestaan.

c De twee dagverbruiken zijn $\frac{50}{n}$ en $\frac{50}{n + 2}$ liter per dag.

$\frac{50}{n} - \frac{50}{n + 2} = \frac{50(n + 2) - 50n}{n(n + 2)} = \frac{100}{n(n + 2)}$.

Algebraïsch zijn $n = 0$ en $n = -2$ uitgesloten. Voor de positieve gehele n uit de context is de noemer positief; de teller is ook positief.

Antwoord Het verschil is $\frac{100}{n(n + 2)}$ liter per dag en is altijd positief voor de toegestane n.

Uitwerkingen

Paragraaf 4.3 · opgaven 1–20

Machten samenvoegen

1 Oppervlakte van een vlak

a De getallen leveren $2 \times 3 = 6$.

Het grondtal is in beide machten x: $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$.

Omdat $x > 0$, zijn alle gebruikte machten toegestaan.

Antwoord $A = 6x^5$.

b De macht van een macht is $(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$.

De oorspronkelijke noemer x^3 mag niet 0 zijn; $x > 0$ voldoet daaraan.

$\frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$.

Antwoord De uitdrukking is x^3 voor $x > 0$.

Alternatief: Schrijf de teller als zes factoren x en streep drie factoren uit teller en noemer weg; dat mag omdat $x \neq 0$.

c Vul $x = 2$ in: $A = 6 \times 2^5$.

$2^5 = 32$, dus $A = 6 \times 32 = 192$.

$x = 2$ voldoet aan $x > 0$.

Antwoord De oppervlakte is 192 dm^2.

d Bij $x = 2$ zijn de zijden $2 \times 2^2 = 8$ dm en $3 \times 2^3 = 24$ dm.

De oppervlakte rechtstreeks uit de zijden is $8 \times 24 = 192$ dm^2.

Dit stemt overeen met c en geeft een positieve oppervlakte bij positieve zijden.

De controle ondersteunt deze berekening; één ingevulde waarde bewijst geen algemene algebraïsche regel.

Antwoord De uitkomst 192 dm^2 klopt met de oorspronkelijke afmetingen.

2 Een enkele macht

a De teller wordt $y^{4+7} = y^{11}$.

Delen door y^2 geeft $y^{11-2} = y^9$.

De oorspronkelijke noemer y^2 is niet 0 omdat $y \neq 0$.

Antwoord De uitdrukking is y^9 voor $y \neq 0$.

Alternatief: Combineer meteen de exponenten: $4 + 7 - 2 = 9$.

b $(3y^2)^3 = 3^3 \times (y^2)^3 = 27y^6$.

De getallen geven $27 \div 9 = 3$; de machten geven $y^{6-5} = y$.

De noemer $9y^5$ is niet 0 bij $y \neq 0$.

Antwoord De uitdrukking is $3y$ voor $y \neq 0$.

Alternatief: Schrijf $27y^6$ als $3y \times 9y^5$ en deel de gemeenschappelijke niet-nulle factor weg.

c De termen zijn gelijk: $y^3 + y^3 = (1 + 1)y^3$.

Optellen van gelijke termen geeft $2y^3$.

De regel waarin exponenten worden opgeteld geldt bij vermenigvuldigen van machten van hetzelfde grondtal, niet bij optellen.

Antwoord $y^3 + y^3 = 2y^3$; y^6 is geen juiste algemene herleiding.

3 Tekens en haakjes

a De hele inhoud van de haakjes wordt gekwadrateerd.

$(-2)^2 = 4$ en $(z^3)^2 = z^6$.

Er is geen deler en geen negatieve exponent; $z = 0$ is ook toegestaan.

Antwoord $(-2z^3)^2 = 4z^6$.

Alternatief: Vermenigvuldig $(-2z^3)(-2z^3)$: de twee negatieve factoren geven een positief product.

b $(-2z)^3 = (-2)^3z^3$.

Drie factoren -2 geven $(-2)^3 = -8$.

De coëfficiënt is dus negatief; de waarde van de hele uitdrukking hangt daarnaast van z af. Alle reële z zijn toegestaan.

Antwoord $(-2z)^3 = -8z^3$.

4 Kaartjes per bestelling

a $(3k^2)^2 = 9k^4$.

Omdat $k > 0$, is de noemer niet 0; $\frac{9k^4}{k} = 9k^3$.

Bij $k = 2$ is $N = 9 \times 2^3 = 72$.

Antwoord $N = 9k^3$; bij $k = 2$ bevat de bestelling 72 kaartjes.

b De factor is $\frac{9 \times 4^3}{9 \times 2^3}$.

Omdat $4 = 2 \times 2$, is $\frac{4^3}{2^3} = (\frac{4}{2})^3 = 2^3 = 8$.

Beide instellingen zijn positieve gehele getallen en passen bij het model.

Antwoord De bestelling bij $k = 4$ is acht keer zo groot.

Alternatief: Bereken $N(4) = 576$ en $N(2) = 72$; $576 \div 72 = 8$.

Negatieve exponenten

5 Een exponent onder nul

a Een negatieve exponent geeft de omgekeerde macht: $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$.

$5^2 = 25$.

Het grondtal 5 is niet 0.

Antwoord $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

b De exponent -4 hoort alleen bij x, niet bij de factor 3.

$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$.

Vermenigvuldigen met 3 geeft $\frac{3}{x^4}$; $x \neq 0$ houdt de noemer niet 0.

Antwoord $3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$ voor $x \neq 0$.

5 Een exponent onder nul (vervolg)

c $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Delen door $\frac{1}{8}$ is vermenigvuldigen met 8.

De oorspronkelijke deler $2^{-3} = \frac{1}{8}$ is niet 0.

Antwoord $\frac{1}{2^{-3}} = 8$.

Alternatief: Gebruik $\frac{2^0}{2^{-3}} = 2^{0-(-3)} = 2^3 = 8$.

6 Positieve exponenten

a Het grondtal is t en de quotiëntregel geeft $t^{-3-2} = t^{-5}$.

$t^{-5} = \frac{1}{t^5}$.

$t \neq 0$ is nodig voor zowel de oorspronkelijke negatieve macht als de oorspronkelijke noemer.

Antwoord De uitdrukking is $\frac{1}{t^5}$ voor $t \neq 0$.

Alternatief: Vervang eerst t^{-3} door $\frac{1}{t^3}$; delen door t^2 levert $\frac{1}{t^3 t^2} = \frac{1}{t^5}$.

b De volledige basis is 2t: $(2t)^{-2} = \frac{1}{(2t)^2}$.

$(2t)^2 = 4t^2$.

De basis 2t is niet 0 omdat $t \neq 0$.

Antwoord $(2t)^{-2} = \frac{1}{4t^2}$ voor $t \neq 0$.

c Elke term is $\frac{1}{t^2}$.

Gelijke breuken optellen geeft $\frac{1+1}{t^2} = \frac{2}{t^2}$.

De noemer blijft niet 0 doordat $t \neq 0$.

Antwoord $t^{-2} + t^{-2} = \frac{2}{t^2}$ voor $t \neq 0$.

Alternatief: Tel eerst gelijke termen op: $2t^{-2}$. Herschrijf daarna de negatieve exponent.

7 Mintekens lezen

a De haakjes maken −3 tot het grondtal.

$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$.

$(-3)^3 = -27$; de basis en de noemer zijn niet 0.

Antwoord $(-3)^{-3} = -\frac{1}{27}$.

b Zonder haakjes wordt eerst 3^{-2} berekend; het voorafgaande minteken staat buiten de macht.

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Het minteken maakt de uitkomst $-\frac{1}{9}$; de basis 3 is niet 0.

Antwoord $-3^{-2} = -\frac{1}{9}$.

8 Verf in een oefenmodel

a $d^{-2} = \frac{1}{d^2}$.

De factor 72 blijft in de teller.

$d > 0$ zorgt dat de negatieve macht en de breuk bestaan.

Antwoord $Q = \frac{72}{d^2}$, met $d > 0$.

b Bij $d = 3$ is $d^2 = 9$.

$Q = \frac{72}{9} = 8$.

$d = 3$ is toegestaan en de hoeveelheid is positief.

Antwoord $Q = 8$ liter bij $d = 3$.

Alternatief: Bereken rechtstreeks $72 \times 3^{-2} = 72 \times \frac{1}{9} = 8$.

c $Q(6) = \frac{72}{6^2} = \frac{72}{36} = 2$ liter.

$2 \div 8 = \frac{1}{4}$.

Verdubbeling van d maakt d^2 vier keer zo groot, dus de breuk wordt vier keer zo klein; beide instellingen zijn positief.

Antwoord Bij $d = 6$ is $Q = 2$ liter, een kwart van de hoeveelheid bij $d = 3$.

9 Exponenten en breuken

a $(3u)^{-2} = \frac{1}{(3u)^2}$.

$(3u)^2 = 9u^2$.

$u \neq 0$ zorgt dat de oorspronkelijke basis en de uiteindelijke noemer niet 0 zijn.

Antwoord $(3u)^{-2} = \frac{1}{9u^2}$ voor $u \neq 0$.

b In de teller is $u^{-4} \times u^2 = u^{-4+2} = u^{-2}$.

$\frac{u^{-2}}{2} = \frac{1}{2u^2}$.

De negatieve macht vereist $u \neq 0$; de oorspronkelijke deler 2 is niet 0.

Antwoord De uitdrukking is $\frac{1}{2u^2}$ voor $u \neq 0$.

Alternatief: Vervang u^{-4} door $\frac{1}{u^4}$ en schrap vervolgens u^2: $\frac{u^2}{2u^4} = \frac{1}{2u^2}$.

c Eerst wordt de macht 2^{-4} berekend: $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Het minteken staat buiten de macht.

De basis 2 is niet 0.

Antwoord $-2^{-4} = -\frac{1}{16}$.

Wortels herleiden

10 Kwadraatfactoren

a $72 = 36 \times 2$, met beide factoren niet-negatief.

$\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$.

$\sqrt{36} = 6$ en de wortel zelf is niet-negatief.

Antwoord $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

b $9x^2$ is voor iedere reële x niet-negatief.

$\sqrt{9x^2} = 3\sqrt{x^2}$.

De wortel van x^2 is $|x|$, zodat ook bij een negatieve x de uitkomst niet-negatief is.

Antwoord $\sqrt{9x^2} = 3|x|$ voor alle reële x.

Alternatief: Als $x \geq 0$ is het antwoord $3x$; als $x < 0$ is het antwoord $-3x$.

10 Kwadraatfactoren (vervolg)

c $x \geq 0$ maakt zowel $16x$ als x niet-negatief.

Het product is $\sqrt{16x \times x} = \sqrt{16x^2}$.

$\sqrt{16x^2} = 4|x| = 4x$ omdat $x \geq 0$.

Antwoord $\sqrt{16x} \times \sqrt{x} = 4x$ voor $x \geq 0$.

Alternatief: Schrijf $\sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$; het product wordt $4(\sqrt{x})^2 = 4x$.

11 Wortels in eenvoudige vorm

a $180 = 36 \times 5$.

36 en 5 zijn niet-negatief, dus $\sqrt{180} = \sqrt{36}\sqrt{5}$.

$\sqrt{36} = 6$; 5 heeft geen kwadraatfactor groter dan 1.

Antwoord $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

Alternatief: Eerst $\sqrt{180} = 3\sqrt{20}$, daarna $3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

b $25r^2$ is niet-negatief.

$\sqrt{25r^2} = 5|r|$.

Omdat $r < 0$, is $|r| = -r$.

Antwoord $\sqrt{25r^2} = -5r$ voor $r < 0$. Deze uitkomst is positief.

c De tellerwortel bestaat omdat $12 \geq 0$; de noemerwortel is positief omdat $3 > 0$.

De wortelquotiëntregel geeft $\sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4}$.

$\sqrt{4} = 2$.

Antwoord $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$.

Alternatief: Schrijf $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ en deel de niet-nulle factor $\sqrt{3}$ weg.

12 Dezelfde wortels

a $50 = 25 \times 2$ en $8 = 4 \times 2$; alle wortelinhouden zijn niet-negatief.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ en $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Gelijke worteldelen kunnen worden opgeteld: $(5 + 2)\sqrt{2}$.

Antwoord $\sqrt{50} + \sqrt{8} = 7\sqrt{2}$.

12 Dezelfde wortels (vervolg)

b Beide wortelinhouden zijn niet-negatief, zodat de productregel geldt.

$\sqrt{50} \times \sqrt{8} = \sqrt{400}$.

$\sqrt{400} = 20$.

Antwoord $\sqrt{50} \times \sqrt{8} = 20$.

Alternatief: Gebruik de vormen uit a: $5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 10 \times 2 = 20$.

13 Een vierkant paneel

a $s = \sqrt{288}$.

$288 = 144 \times 2$, met beide factoren niet-negatief.

$\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$; een lengte is niet-negatief.

Antwoord De zijde is $12\sqrt{2}$ cm.

b $d = \sqrt{2} \times \sqrt{s^2} = |s|\sqrt{2}$; de wortelinhouden zijn niet-negatief.

Een lengte s voldoet aan $s \geq 0$, dus $|s| = s$.

Met $s = 12\sqrt{2}$ volgt $d = 12\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 24$.

Antwoord $d = 24$ cm. De vorm $d = s\sqrt{2}$ gebruikt de voorwaarde $s \geq 0$.

Alternatief: Vul $s^2 = 288$ rechtstreeks in: $d = \sqrt{2 \times 288} = \sqrt{576} = 24$ cm.

14 Een rand om een vloer

a $s = \sqrt{98}$.

$98 = 49 \times 2$, dus $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

De oppervlakte is positief; kies de positieve lengte.

Antwoord $s = 7\sqrt{2}$ m.

b $P = 4 \times 7\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$.

$28\sqrt{2} \approx 39{,}59797975$.

Rond pas de einduitkomst af; de omtrek is positief en heeft eenheid meter.

Antwoord $P = 28\sqrt{2}$ m, ongeveer 39,6 m.

15 Wortels herleiden

a $245 = 49 \times 5$.

De niet-negatieve factoren geven $\sqrt{245} = \sqrt{49}\sqrt{5}$.

$\sqrt{49} = 7$ en 5 heeft geen kwadraatfactor groter dan 1.

Antwoord $\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$.

b $36z^2$ is voor iedere reële z niet-negatief.

$\sqrt{36z^2} = 6\sqrt{z^2}$.

$\sqrt{z^2} = |z|$.

Antwoord $\sqrt{36z^2} = 6|z|$ voor alle reële z.

Alternatief: Voor $z \geq 0$ is de uitkomst $6z$; voor $z < 0$ is de uitkomst $-6z$.

c $m > 0$ maakt $20m$ en $5m$ positief en de noemer $\sqrt{5m}$ niet 0.

De breuk wordt $\sqrt{\frac{20m}{5m}} = \sqrt{4} = 2$.

Bij $m = 0$ zou de oorspronkelijke noemer $\sqrt{0} = 0$ zijn, zodat de breuk niet bestaat.

Antwoord De uitdrukking is 2 voor $m > 0$; $m = 0$ is uitgesloten.

Alternatief: Schrijf $\sqrt{20m} = 2\sqrt{5m}$ en deel de niet-nulle wortelfactor weg.

Formules beoordelen

16 Drie instellingen

a Vul $t = 2$ in: $P = 2 \times 2^3 + 6$.

$2^3 = 8$, dus $P = 16 + 6 = 22$.

De gebruikte instelling is positief.

Antwoord $P = 22$ punten.

b Vul $t = 4$ in: $R = \sqrt{25 \times 4}$.

De wortelinhoud is $100 \geq 0$; $\sqrt{100} = 10$.

R is een lengte, dus de niet-negatieve wortel past bij de context.

Antwoord $R = 10$ cm.

16 Drie instellingen (vervolg)

c Bij t = 1 is $R = \sqrt{25} = 5$ cm.

Bij t = 4 is R = 10 cm.

$10 \div 5 = 2$; de verhouding is dus 2 en beide uitkomsten zijn positief.

Antwoord De verwachting klopt niet: de lengte wordt twee keer zo groot.

17 Twee rekenmodellen

a $V = 0{,}8 \times (2{,}5)^3$.

$(2{,}5)^3 = 15{,}625$ en $0{,}8 \times 15{,}625 = 12{,}5$.

$h = 2{,}5$ voldoet aan $h > 0$; het volume is positief.

Antwoord V = 12,5 liter.

b $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$.

π is positief en niet 0; de wortelinhoud is ongeveer 15,9155.

$r \approx 3{,}989422804$; pas aan het einde afronden.

Een positieve straal past bij de positieve oppervlakte.

Antwoord $r \approx 3{,}99$ cm.

c Bij een nieuwe hoogte 2h is $V = 0{,}8(2h)^3$.

$(2h)^3 = 8h^3$, dus het nieuwe volume is $8 \times 0{,}8h^3$.

Het is daardoor acht keer het oude volume. Deze redenering geldt voor iedere $h > 0$ binnen het gegeven model.

Antwoord De verwachting klopt niet; het model geeft bij verdubbeling van h een acht keer zo groot volume.

Alternatief: Vergelijk h = 2,5 en h = 5: V is 12,5 en 100 liter, met verhouding 8. Dit rekent één geval na; de algebraïsche redenering onderbouwt het algemene modelgedrag.

18 Een ontwerpinstelling

a $(4p^2)^2 = 16p^4$.

$\frac{16p^4}{8p} = 2p^{4-1} = 2p^3$.

De oorspronkelijke noemer 8p is niet 0 omdat $p > 0$.

Antwoord $A = 2p^3$ voor $p > 0$.

Alternatief: Schrijf de teller als $2p^3 \times 8p$ en schrap de niet-nulle factor 8p.

18 Een ontwerpinstelling (vervolg)

b In de herleide formule: $A = 2 \times (1{,}5)^3 = 2 \times 3{,}375 = 6{,}75$.

In de oorspronkelijke formule: $4 \times (1{,}5)^2 = 9$, dus de teller is $9^2 = 81$ en de noemer is $8 \times 1{,}5 = 12$.

$81 \div 12 = 6{,}75$. De instelling is toegestaan en het oppervlak is positief.

De invulcontrole gaat over deze instelling; de herleiding in a geldt voor het hele domein.

Antwoord $A = 6{,}75$ cm^2; beide formules geven dezelfde waarde.

c Het herleide model is $A = 2p^3$.

Bij instelling $2p$ wordt de oppervlakte $2(2p)^3 = 16p^3$.

Ten opzichte van $2p^3$ is dat een factor 8; p en 2p zijn beide positief.

Antwoord Het model voorspelt een acht keer zo grote oppervlakte, dus de verwachting van een verdubbeling klopt niet.

19 Vier uitwerkingen bekeken

a p^2 bestaat uit twee factoren p en p^3 uit drie factoren p.

Het product bevat vijf factoren p en is p^5, ook bij $p = 0$.

Bij een product van machten met hetzelfde grondtal worden exponenten opgeteld. De vermenigvuldiging van exponenten hoort bij een macht van een macht.

Antwoord $p^2 \times p^3 = p^5$; de uitspraak met p^6 is niet algemeen juist.

b Een negatieve exponent geeft het omgekeerde van een positieve macht.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

De basis 2 is niet 0. Het minteken in de exponent maakt de uitkomst niet negatief.

Antwoord $2^{-3} = \frac{1}{8}$; -8 is onjuist.

c De wortel is altijd niet-negatief.

Daarom is $\sqrt{w^2} = |w|$ voor iedere reële w; w^2 is steeds niet-negatief.

Bij $w = -4$ is $\sqrt{w^2} = \sqrt{16} = 4$, terwijl $w = -4$.

Dit tegenvoorbeeld weerlegt de uitspraak voor alle reële w; het is geen bewijs van de correcte algemene regel.

Antwoord De algemene vorm is $|w|$. Bijvoorbeeld $w = -4$ laat de fout zien.

19 Vier uitwerkingen bekeken (vervolg)

d De exponent is vergeten: $A = 3 \times 4^2$.

$4^2 = 16$, dus $A = 3 \times 16 = 48$ cm^2.

Rechtstreeks als product: $3 \times 4 \times 4 = 48$. De oppervlakte is positief.

Antwoord $A = 48$ cm^2; 12 cm^2 is onjuist.

20 Een overkapping ontwerpen

a $(2v^3)^2 = 4v^6$.

$\frac{4v^6}{4v} = v^{6-1} = v^5$.

De oorspronkelijke noemer $4v$ is niet 0 omdat $v > 0$.

Antwoord $B = v^5$ voor $v > 0$.

b $(v^2)^3 = v^6$.

De teller is $v^{6+4} = v^{10}$; delen door v^2 geeft v^8.

De noemer v^2 is niet 0 op het gegeven domein $v > 0$.

Antwoord De uitdrukking is v^8 voor $v > 0$.

c $B = (1{,}5)^5 = 7{,}59375$.

Afronden op twee decimalen geeft 7,59.

$v = 1{,}5$ is toegestaan en de oppervlakte is positief.

Antwoord $B \approx 7{,}59$ m^2.

Alternatief: In de oorspronkelijke formule: $(2 \times (1{,}5)^3)^2 \div (4 \times 1{,}5) = 45{,}5625 \div 6 = 7{,}59375$ m^2.

d De instelling verdubbelt van 1,5 naar 3.

Omdat $B = v^5$, geeft de verhouding $(\frac{3}{1{,}5})^5 = 2^5 = 32$.

Ook rechtstreeks: $B(3) = 243$ en $B(1{,}5) = 7{,}59375$, met verhouding 32. Beide instellingen zijn positief.

Antwoord Noors voorspelling klopt niet: het model geeft een 32 keer zo grote oppervlakte.

Uitwerkingen

Paragraaf 4.4 · opgaven 1–20

Eén letter alleen

1 Een opslagwand

a Het doel is h alleen aan één kant. Trek 5b af: $2h = 34 - 5b$.

Deel door de niet-nulle constante 2: $h = \frac{34 - 5b}{2}$.

Splits de teller over de noemer: $h = -\frac{5}{2}b + 17$. Deze omwerkingen gelden voor alle reële b en h die aan de oorspronkelijke formule voldoen.

Antwoord $h = -\frac{5}{2}b + 17$.

b Vergelijk $h = -\frac{5}{2}b + 17$ met $h = ab + c$.

Het getal bij b is a; het losse getal is c.

Antwoord $a = -\frac{5}{2}$ en $c = 17$.

c Bij $b = 3$ is $h = -\frac{5}{2} \times 3 + 17 = \frac{19}{2} = 9{,}5$ meter. Hier zijn $b \geq 2$ en $h \geq 3$.

Bij $b = 6$ is $h = -\frac{5}{2} \times 6 + 17 = 2$ meter. De breedte voldoet, maar de hoogte is kleiner dan 3 meter.

Beide getallenparen voldoen algebraïsch aan $5b + 2h = 34$; alleen het eerste voldoet ook aan de ontwerpvoorwaarden.

Antwoord Kies b = 3 meter en h = 9,5 meter.

2 Een letter komt terug

a Verzamel de termen met m: trek 4m en daarna 21 van beide kanten af. Er blijft $7n - 21 = 5m$ over.

Deel beide kanten door 5. Deze constante is niet nul.

Antwoord $m = \frac{7n - 21}{5}$; er zijn geen aanvullende beperkingen op n.

Alternatief: Trek 9m en 7n af: $-5m = 21 - 7n$. Deel door −5; dit geeft dezelfde formule.

2 Een letter komt terug (vervolg)

b Trek px van beide kanten af: $qy = r - px$.

Delen door q kan alleen als $q \neq 0$. Dan is $y = \frac{r - px}{q} = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$.

Vergelijk met $y = ax + b$.

Antwoord Voor $q \neq 0$: $y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$, met $a = -\frac{p}{q}$ en $b = \frac{r}{q}$. Als $q = 0$ bepaalt deze bewerking y niet.

3 De vorm van een lijn

a Trek 8x af: $-3y = 12 - 8x$.

Deel door −3: $y = \frac{12 - 8x}{-3} = \frac{8}{3}x - 4$.

Antwoord $y = \frac{8}{3}x - 4$; $a = \frac{8}{3}$ en $b = -4$. De constante deler −3 is niet nul.

b Invullen geeft $4x + 0y = 20$, dus $4x = 20$ en $x = 5$.

De term met y is nul voor elke reële y. Delen door $q = 0$ is niet toegestaan.

Antwoord $x = 5$. Bij die x is elke reële y mogelijk; de vergelijking geeft geen unieke y.

4 Een rek van stroken

a Trek 6l af: $4b = 120 - 6l$.

Deel door de niet-nulle constante 4: $b = \frac{120 - 6l}{4} = -\frac{3}{2}l + 30$.

Antwoord $b = -\frac{3}{2}l + 30$, met $a = -\frac{3}{2}$ en $c = 30$.

b Bij $l = 10$ is $b = 15$. De lengte l is kleiner dan 12, dus dit ontwerp valt af.

Bij $l = 14$ is $b = 9$. Beide afmetingen voldoen: $14 \geq 12$ en $9 \geq 8$.

Bij $l = 16$ is $b = 6$. De afmeting b is kleiner dan 8, dus dit ontwerp valt af.

Controle van het gekozen ontwerp: $6 \times 14 + 4 \times 9 = 84 + 36 = 120$ centimeter.

Antwoord Alleen $l = 14$ centimeter en $b = 9$ centimeter is bruikbaar.

5 Pakketten voor verlichting

a Trek 24s af: $8n = E - 24s$.

Deel door 8, dat niet nul is.

Antwoord $n = \frac{E - 24s}{8}$. In de context is deze uitkomst een niet-negatief geheel getal.

5 Pakketten voor verlichting (vervolg)

b Bij s = 8 wordt $n = \frac{200 - 192}{8} = 1$. De aantallen 8 en 1 zijn toegestaan.

Bij s = 9 wordt $n = \frac{200 - 216}{8} = -2$. Een negatief aantal pakketten is niet toegestaan.

Controle van het bruikbare voorstel: $24 \times 8 + 8 \times 1 = 200$ wattuur.

Antwoord Gebruik 8 grote pakketten en 1 klein pakket.

6 Een bedrukt paneel

a Trek 8w af: $3h = 96 - 8w$.

Deel door 3: $h = \frac{96 - 8w}{3} = -\frac{8}{3}w + 32$. Delen mag, want $3 \neq 0$.

Antwoord $h = -\frac{8}{3}w + 32$; $a = -\frac{8}{3}$ en $b = 32$.

b Bij w = 3 is h = 24. Dit voorstel voldoet niet aan $w \geq 4$.

Bij w = 9 is h = 8. Nu zijn $w \geq 4$ en $h \geq 6$ allebei waar.

Het gekozen paar voldoet aan de formule: $8 \times 9 + 3 \times 8 = 96$.

Antwoord Kies w = 9 decimeter en h = 8 decimeter.

Breuk, kwadraat en wortel

7 De omgekeerde bewerking

a De oorspronkelijke noemer geeft $x + 4 \neq 0$, dus $x \neq -4$.

Vermenigvuldig beide kanten met x + 4: $y(x + 4) = 18$.

Omdat de teller 18 niet nul is, kan y niet nul zijn. Deel door y: $x + 4 = \frac{18}{y}$.

Trek 4 af: $x = \frac{18}{y} - 4$. Voor elke $y \neq 0$ is $x + 4 = \frac{18}{y}$ niet nul.

Antwoord $x = \frac{18}{y} - 4$, met $y \neq 0$. In de oorspronkelijke formule geldt $x \neq -4$.

7 De omgekeerde bewerking (vervolg)

b Trek 10 af: $5a^2 = K - 10$.

Deel door 5: $a^2 = \frac{K - 10}{5}$.

De uitdrukking rechts moet minstens nul zijn, dus $K \geq 10$. Omdat $a \geq 0$ is, nemen we de niet-negatieve vierkantswortel.

Antwoord $a = \sqrt{\frac{K - 10}{5}}$, met $K \geq 10$ en $a \geq 0$. Bij $K = 10$ is $a = 0$; als een lengte strikt positief moet zijn, geldt $K > 10$.

c De oorspronkelijke wortel moet reëel zijn: $z - 3 \geq 0$, dus $z \geq 3$.

Trek 7 af en deel door 2: $\sqrt{z - 3} = \frac{W - 7}{2}$.

Een vierkantswortel is niet negatief. Daarom moet $W \geq 7$ zijn.

Kwadrateren geeft $z - 3 = (\frac{W - 7}{2})^2$. Tel 3 op.

Antwoord $z = 3 + (\frac{W - 7}{2})^2$, met $W \geq 7$. De berekende z voldoet dan aan $z \geq 3$.

8 Formules omkeren

a Oorspronkelijk geldt $p \neq 1$.

Vermenigvuldig met $p - 1$: $V(p - 1) = 48$.

Omdat $48 \neq 0$ is, is $V \neq 0$. Deel door V en tel 1 op.

Antwoord $p = 1 + \frac{48}{V}$, met $V \neq 0$. De oorspronkelijke beperking is $p \neq 1$.

b Trek 6 af en deel door 2: $d^2 = \frac{A - 6}{2}$.

Voor een reële afstand moet $A \geq 6$ zijn. Kies de niet-negatieve wortel omdat $d \geq 0$.

Antwoord $d = \sqrt{\frac{A - 6}{2}}$, met $A \geq 6$. Bij $A = 6$ is $d = 0$.

c De oorspronkelijke wortel geeft $t \geq -2$.

Tel 1 op en deel door 4: $\sqrt{t + 2} = \frac{R + 1}{4}$. De rechterkant moet minstens nul zijn, dus $R \geq -1$.

Kwadrateer en trek 2 af.

Antwoord $t = (\frac{R + 1}{4})^2 - 2$, met $R \geq -1$ en oorspronkelijk $t \geq -2$.

9 Boven en onder de breukstreep

a De oorspronkelijke noemer geeft $x \neq 2$.

Vermenigvuldig met $x - 2$: $P(x - 2) = 3x + 5$.

Werk de haakjes uit: $Px - 2P = 3x + 5$. Verzamel de termen met x: $Px - 3x = 2P + 5$.

Haal x buiten haakjes: $(P - 3)x = 2P + 5$. Bij $P = 3$ zou $0x = 11$ staan; dat kan niet. Deel daarom alleen voor $P \neq 3$ door $P - 3$.

De uitkomst kan geen $x = 2$ geven: $x - 2 = \frac{11}{P - 3}$, wat niet nul is.

Antwoord $x = \frac{2P + 5}{P - 3}$, met $P \neq 3$. Oorspronkelijk is $x \neq 2$.

Alternatief: Schrijf de oorspronkelijke formule als $P = 3 + \frac{11}{x - 2}$. Maak daarna x vrij door $P - 3$ van beide kanten af te trekken.

b Bij $P = 4$ volgt $x = \frac{8 + 5}{4 - 3} = 13$. Dit is niet de uitgesloten waarde 2.

Terugsubstitutie: $\frac{3 \times 13 + 5}{13 - 2} = \frac{44}{11} = 4$.

Bij $P = 3$ zou $3(x - 2) = 3x + 5$ gelden. Na uitwerken staat $-6 = 5$. Dat is onmogelijk.

Antwoord Bij $P = 4$ is $x = 13$. Bij $P = 3$ is er geen oplossing.

10 Twee vierkante zones

a Trek 14 af en deel door 2: $s^2 = \frac{A - 14}{2}$.

De zijde is positief, dus $s = \sqrt{\frac{A - 14}{2}}$. De inhoud van de wortel moet positief zijn omdat $s > 0$.

Antwoord $s = \sqrt{\frac{A - 14}{2}}$ meter, met $A > 14$ vierkante meter.

b Invullen geeft $s = \sqrt{\frac{86 - 14}{2}} = \sqrt{36} = 6$ meter.

Controle: $2 \times 6^2 + 14 = 72 + 14 = 86$ vierkante meter.

Antwoord Elke vierkante zone heeft zijde 6 meter.

c De uitkomst $s = 0$ voldoet algebraïsch aan $A = 2s^2 + 14$.

Een zone met zijde nul is geen vierkante zone met een positieve zijde. De context eist $s > 0$.

Antwoord Nee. $A = 14$ valt buiten de contextvoorwaarde $A > 14$.

11 De gemiddelde workshopprijs

a Oorspronkelijk is $n > 0$, zodat de noemer n niet nul is.

Vermenigvuldig met n: $kn = 12n + 240$. Verzamel de termen met n: $(k - 12)n = 240$.

Omdat de rechterkant 240 is, geldt $k \neq 12$. Deel door $k - 12$: $n = \frac{240}{k - 12}$.

Voor $n > 0$ moet $k - 12$ positief zijn. Dus $k > 12$. Ook moet de uitkomst een geheel getal zijn.

Antwoord $n = \frac{240}{k - 12}$, met $k > 12$ en een geheel positieve uitkomst voor n.

Alternatief: Splits de oorspronkelijke breuk: $k = 12 + \frac{240}{n}$. Trek 12 af en maak daarna n vrij.

b Bij $k = 28$ is $n = \frac{240}{16} = 15$. Dit is een positief geheel aantal. Controle: $\frac{12 \times 15 + 240}{15} = 28$.

Bij $k = 30$ is $n = \frac{240}{18} = \frac{40}{3}$. Dit is geen geheel aantal deelnemers.

Afronden van $\frac{40}{3}$ zou een andere gemiddelde prijs geven; het gaat om precies 30 euro.

Antwoord Precies 28 euro kan bij 15 deelnemers. Precies 30 euro kan niet bij een geheel aantal deelnemers.

12 Drie omwerkingen

a De oorspronkelijke noemer geeft $t \neq -6$.

Vermenigvuldig met $t + 6$: $B(t + 6) = 35$. Omdat $35 \neq 0$ is, moet $B \neq 0$ zijn.

Deel door B en trek 6 af.

Antwoord $t = \frac{35}{B} - 6$, met $B \neq 0$; oorspronkelijk $t \neq -6$.

b Trek 5 af en deel door 7: $w^2 = \frac{U - 5}{7}$.

Kies de positieve wortel omdat $w > 0$. Daarom is ook de inhoud van de wortel positief.

Antwoord $w = \sqrt{\frac{U - 5}{7}}$, met $U > 5$.

c Een reële wortel vereist $z \geq 4$.

Trek 2 af en deel door 3: $\sqrt{z - 4} = \frac{F - 2}{3}$. Dit vereist $F \geq 2$.

Kwadrateer en tel 4 op.

Antwoord $z = 4 + (\frac{F - 2}{3})^2$, met $F \geq 2$; oorspronkelijk $z \geq 4$.

De formule terugzetten

13 Terug in de oorspronkelijke formule

a Substitueer de formule voor u: $6 \times \frac{45 - 5v}{6} + 5v$.

De constante noemer 6 is niet nul. Vereenvoudigen geeft $45 - 5v + 5v = 45$.

De oorspronkelijke vergelijking geldt dus na terugsubstitutie voor elke reële v.

Antwoord De omgewerkte formule is voor alle reële v correct.

b Bij v = 3 geeft de nieuwe formule $u = \frac{45 - 15}{6} = 5$. Terugsubstitutie: $6 \times 5 + 5 \times 3 = 30 + 15 = 45$.

Bij v = 9 is $u = \frac{45 - 45}{6} = 0$. Terugsubstitutie: $6 \times 0 + 5 \times 9 = 45$.

Beide waarden zijn toegestaan; de enige deler is de constante 6.

Antwoord De twee getallencontroles kloppen: (u, v) = (5, 3) en (0, 9).

c Een formule kan bij enkele getallen toevallig kloppen en bij andere niet.

De berekening bij a gebruikt geen gekozen v en vereenvoudigt steeds tot 45, zonder verboden deling.

Antwoord Nee. De getallencontroles controleren twee gevallen; de algemene terugsubstitutie onderbouwt alle toegestane gevallen.

14 Twee voorstellen

a Bij k = 2 zijn beide nieuwe noemers −2 en dus niet nul.

Voorstel I geeft $m = \frac{6 - 4}{-2} = -1$, dat niet −2 is. Terugsubstitutie geeft $\frac{4 \times (-1) + 6}{-1 + 2} = 2$.

Voorstel II geeft $m = \frac{6 + 4}{-2} = -5$, dat eveneens niet −2 is. Terugsubstitutie geeft $\frac{-20 + 6}{-3} = \frac{14}{3}$; dat is niet 2.

Antwoord Voorstel II is fout. Voorstel I doorstaat deze controle, maar één waarde bewijst nog niet de algemene juistheid.

14 Twee voorstellen (vervolg)

b Voorstel I vereist $k \neq 4$. Met $m = \frac{6-2k}{k-4}$ is $4m + 6 = \frac{24-8k+6k-24}{k-4} = \frac{-2k}{k-4}$.

De oorspronkelijke noemer wordt $m + 2 = \frac{6-2k+2k-8}{k-4} = \frac{-2}{k-4}$. Deze is niet nul voor $k \neq 4$.

Dus $\frac{4m+6}{m+2} = \frac{-2k}{k-4} \div \frac{-2}{k-4} = k$.

Bij $k = 4$ zou $4m + 8 = 4m + 6$ moeten gelden. Daarom hoort $k = 4$ niet bij de oorspronkelijke formule.

Antwoord Voorstel I is correct voor $k \neq 4$. De oorspronkelijke beperking $m \neq -2$ wordt dan automatisch gerespecteerd.

Alternatief: Werk de oorspronkelijke formule eerst om: $k(m + 2) = 4m + 6$, dus $(k - 4)m = 6 - 2k$. Dit onderbouwt dezelfde formule; terugsubstitutie controleert haar.

15 Na het kwadrateren

a Bij $h = 5$ berekent het voorstel $x = 1 + (\frac{3}{3})^2 = 2$. Terugsubstitutie geeft $3\sqrt{2-1} + 2 = 5$.

Bij $h = -1$ berekent het voorstel ook $x = 1 + (\frac{-3}{3})^2 = 2$. De oorspronkelijke formule geeft opnieuw 5 en dus niet -1.

In beide gevallen is $x \geq 1$, maar alleen $h = 5$ is een mogelijke oorspronkelijke h.

Antwoord De controle bij $h = 5$ klopt. De controle bij $h = -1$ klopt niet.

b Omdat $\sqrt{x-1} \geq 0$ is, is $h \geq 2$.

Substitueer x: $3\sqrt{(\frac{h-2}{3})^2} + 2$.

Voor $h \geq 2$ is $\frac{h-2}{3}$ niet negatief. De wortel van het kwadraat is dan $\frac{h-2}{3}$.

Vereenvoudig: $3 \times \frac{h-2}{3} + 2 = h - 2 + 2 = h$. Bovendien is $x = 1 + (\frac{h-2}{3})^2$ minstens 1.

Antwoord De nieuwe formule is correct met de voorwaarde $h \geq 2$; zonder die voorwaarde komen extra uitkomsten voor.

16 Een bezorgtijdmodel

a Bij T = 18 is $n = \frac{96 - 72}{6} = 4$. Dit is een niet-negatief geheel getal; n + 4 = 8 is niet nul.

Terugsubstitutie: $\frac{96 + 12 \times 4}{4 + 4} = \frac{144}{8} = 18$ minuten.

Bij T = 16 is $n = \frac{96 - 64}{4} = 8$. Dit is eveneens toegestaan; n + 4 = 12 is niet nul.

Terugsubstitutie: $\frac{96 + 12 \times 8}{8 + 4} = \frac{192}{12} = 16$ minuten.

Antwoord Beide controles kloppen: bij 18 minuten horen 4 extra koeriers; bij 16 minuten horen 8 extra koeriers.

b Voor de nieuwe formule is $T \neq 12$ nodig. Met $n = \frac{96 - 4T}{T - 12}$ wordt $96 + 12n = \frac{96T - 1152 + 1152 - 48T}{T - 12} = \frac{48T}{T - 12}$.

De oorspronkelijke noemer wordt $n + 4 = \frac{96 - 4T + 4T - 48}{T - 12} = \frac{48}{T - 12}$, die niet nul is.

Terugsubstitutie geeft $\frac{48T}{T - 12} \div \frac{48}{T - 12} = T$.

Bij T = 12 zou 12n + 48 = 96 + 12n moeten gelden, dus 48 = 96. Dat kan niet.

Voor de context moet de berekende n ook niet-negatief en geheel zijn. De twee numerieke controles behandelen twee gevallen; de algemene substitutie geldt voor iedere $T \neq 12$ en dus ook voor alle toegestane contextgevallen.

Antwoord De nieuwe formule is algebraïsch correct voor $T \neq 12$; in de context moet n bovendien niet-negatief en geheel zijn. T = 12 is onmogelijk.

Alternatief: Schrijf het oorspronkelijke model als $T = 12 + \frac{48}{n + 4}$. Omdat $n \geq 0$ geldt in deze context $12 < T \leq 24$, met alleen tijden die bij een geheel aantal koeriers horen.

17 Een sensorformule

a Bij R = 14 is $z = \frac{10^2}{25} - 3 = 1$. Deze z is toegestaan. De oorspronkelijke formule geeft $5\sqrt{1 + 3} + 4 = 14$.

Bij R = −6 is $z = \frac{(-10)^2}{25} - 3 = 1$. De oorspronkelijke formule geeft 14 en niet −6.

Een vierkantswortel is niet negatief. Daardoor is $R = 5\sqrt{z + 3} + 4$ altijd minstens 4.

Antwoord De controle bij R = 14 klopt; die bij R = −6 niet. De toegestane R voldoen aan $R \geq 4$.

17 Een sensorformule (vervolg)

b Voor $R \geq 4$ is $z = \frac{(R-4)^2}{25} - 3$ minstens -3.

Terugsubstitutie geeft $5\sqrt{\frac{(R-4)^2}{25}} + 4$. Omdat $R - 4 \geq 0$ is, is de wortel $\frac{R-4}{5}$.

Vereenvoudig: $5 \times \frac{R-4}{5} + 4 = R$.

Een getallencontrole laat slechts zien dat die ene toegestane waarde klopt. De algemene substitutie controleert alle $R \geq 4$.

Antwoord De omwerking is correct voor $R \geq 4$. De formule zonder deze voorwaarde is niet gelijkwaardig aan de oorspronkelijke sensorformule.

Van uitkomst naar bruikbare waarde

18 Een zijde is positief

a Voor $d = 6$ is $d^2 + 9 = 36 + 9 = 45$.

Voor $d = -6$ is $d^2 + 9$ ook $36 + 9 = 45$.

Beide waarden voldoen aan de algebraïsche formule, maar de zijde moet positief zijn. Alleen $6 > 0$.

Antwoord De bruikbare zijde is $d = 6$ centimeter.

b Invullen van $d = 0$ geeft $A = 0^2 + 9 = 9$, dus de formule klopt.

De voorwaarde is $d > 0$ en niet $d \geq 0$. Een nulzijde voldoet daar niet aan.

Antwoord Dit ontwerp is niet bruikbaar. De context vereist $A > 9$.

19 Een hoogte in een model

a Bij beide voorgestelde waarden is $3h^2 + 21 = 3 \times 16 + 21 = 69$. De negatieve hoogte voldoet niet aan $h > 0$.

Voor een algemene V: $h^2 = \frac{V-21}{3}$. Kies de positieve wortel voor de hoogte.

Om $h > 0$ te krijgen moet de inhoud van de wortel positief zijn, dus $V > 21$.

Antwoord De bruikbare hoogte is 4 centimeter. Algemeen: $h = \sqrt{\frac{V-21}{3}}$, met $V > 21$.

19 Een hoogte in een model (vervolg)

b Bij $V = 21$ volgt $h^2 = 0$ en dus $h = 0$. Dit is een reële waarde, maar zij voldoet niet aan de positieve hoogtevoorwaarde.

Bij $V = 18$ volgt $h^2 = -1$. Een reëel kwadraat is nooit negatief; de wortelinhoud is negatief.

Antwoord $V = 21$ valt af door de context; $V = 18$ valt al af door het reële worteldomein.

20 Een uitkomst te veel

a De oorspronkelijke wortel vereist $d \geq 1$. Daarom is $H = 2\sqrt{d - 1} + 3$ minstens 3.

De regel $\sqrt{d - 1} = -1$ kan voor geen enkele reële d waar zijn. Kwadrateren maakt van die onmogelijke regel wel een vergelijking met een uitkomst, maar die uitkomst is extra.

Bij $d = 2$ geeft de oorspronkelijke formule $H = 2\sqrt{1} + 3 = 5$ en niet 1.

Alleen de positieve afstand controleren is dus onvoldoende; ook de tekenvoorwaarde van de wortel moet gelden.

Antwoord $H = 1$ is niet toegestaan. De afstand $d = 2$ hoort bij $H = 5$, niet bij $H = 1$.

b Trek 3 af en deel door 2: $\sqrt{d - 1} = \frac{H - 3}{2}$. De rechterkant moet niet-negatief zijn, dus $H \geq 3$.

Kwadrateren en 1 optellen geeft $d = 1 + (\frac{H - 3}{2})^2$. Dit geeft $d \geq 1$ en daarmee ook $d > 0$.

Bij $H = 7$ is $d = 1 + (\frac{4}{2})^2 = 5$ meter.

Terugsubstitutie: $2\sqrt{5 - 1} + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$.

Antwoord $d = 1 + (\frac{H - 3}{2})^2$, met $H \geq 3$; oorspronkelijk $d \geq 1$. Bij $H = 7$ is de bruikbare afstand 5 meter.

Uitwerkingen

Paragraaf 4.5 · opgaven 1–22

Formules combineren

1 Kosten van een werkplek

a Dezelfde grootheid u staat gelijk aan 0,75t. Daarom is $H = 12 + 4 \times (0{,}75t)$.

De vermenigvuldiging geeft $4 \times 0{,}75t = 3t$. Dus $H = 12 + 3t$.

De voorwaarde $0 \le t \le 6$ blijft gelden.

Antwoord De kostenformule is $H = 12 + 3t$, met H in euro en t in uur.

b In de gecombineerde formule geeft $t = 4$: $H = 12 + 3 \times 4 = 24$.

Rechtstreeks: $u = 0{,}75 \times 4 = 3$ draaiuren en $H = 12 + 4 \times 3 = 24$.

De invoer 4 ligt tussen 0 en 6.

Antwoord De reservering kost 24 euro; beide rekenroutes leveren hetzelfde bedrag.

c H en de vaste term 12 hebben de eenheid euro. Omdat t in uur wordt gemeten, moet 3 de eenheid euro per uur hebben.

Het product van euro per uur en uur heeft de eenheid euro. Beide opgetelde termen hebben dus dezelfde eenheid.

Bij $t = 0$ is $H = 12$. Deze invoer is volgens de context toegestaan: er is een reservering, maar het apparaat draait niet.

Antwoord De 3 is een tarief van 3 euro per reserveringsuur. Bij nul gebruik worden de vaste 12 euro betaald.

2 Een kwadratische uitdrukking

a Vervang elke x: $S = 3(2t - 1)^2 - 4(2t - 1) + 7$.

Het kwadraat is $(2t - 1)^2 = 4t^2 - 4t + 1$.

Daarom is $S = 12t^2 - 12t + 3 - 8t + 4 + 7$.

Gelijksoortige termen samennemen geeft $S = 12t^2 - 20t + 14$. Er zijn geen noemers of wortels die het domein beperken.

Antwoord $S = 12t^2 - 20t + 14$ voor alle reële t.

2 Een kwadratische uitdrukking (vervolg)

b Bij $t = -1$ wordt $S = 12 \times (-1)^2 - 20 \times (-1) + 14 = 12 + 20 + 14 = 46$.

Via de oorspronkelijke formule is $x = 2 \times (-1) - 1 = -3$.

Daaruit volgt $S = 3 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) + 7 = 27 + 12 + 7 = 46$.

Antwoord $S = 46$; de controle geeft dezelfde uitkomst.

3 Een breuk samenstellen

a Invullen van r geeft $G = 150 + \frac{180}{t+2}$.

Schrijf ook 150 met noemer $t + 2$: $G = \frac{150(t+2)+180}{t+2}$.

De teller wordt $150t + 300 + 180 = 150t + 480$.

De oorspronkelijke noemer $t + 2$ mag niet nul zijn. Binnen het gegeven domein $t \geq 0$ is hij minstens 2.

Antwoord $G = \frac{150t+480}{t+2}$ voor $t \geq 0$.

Alternatief: De gelijkwaardige vorm $G = 150 + \frac{180}{t+2}$ is bruikbaar bij rekenen, maar is nog niet één breuk.

b De gecombineerde breuk geeft $G = \frac{150 \times 4 + 480}{4+2} = \frac{1080}{6} = 180$.

Rechtstreeks is $r = \frac{36}{6} = 6$ en $G = 150 + 5 \times 6 = 180$.

De invoer $t = 4$ is toegestaan en beide noemers zijn niet nul.

Antwoord $G = 180$.

4 Energie tijdens een vaartocht

a Het totale aantal kilometers is $d = 6 + 2{,}5t$. Dit hele aantal vervangt d in de energieformule.

$E = 480 - 12(6 + 2{,}5t) = 480 - 72 - 30t = 408 - 30t$.

Het opgegeven tijdsdomein $0 \leq t \leq 8$ blijft gelden. De kleinste energie in dit domein is $E(8) = 168$ Wh en is dus niet negatief.

Antwoord $E = 408 - 30t$ Wh, voor $0 \leq t \leq 8$.

4 Energie tijdens een vaartocht (vervolg)

b De voorwaarde is $408 - 30t = 300$. Dus $30t = 108$ en $t = 3{,}6$ uur.

Deze tijd ligt in het opgegeven domein. De totale afstand is $d = 6 + 2{,}5 \times 3{,}6 = 15$ km.

Controle: $480 - 12 \times 15 = 300$ Wh.

Antwoord Het lampje gaat na 3,6 uur, dus na 3 uur en 36 minuten, aan. Er is dan in totaal 15 km gevaren.

5 Volledige ventilatiekleppen

a Vervang Q door $4 + 0{,}8n$: $D = \frac{180}{4+0{,}8n}$.

De noemer is $0{,}8(n + 5)$. Delen van teller en noemer door 0,8 geeft $D = \frac{225}{n+5}$.

Binnen $0 \le n \le 20$ is $n + 5$ positief. Alleen gehele n horen bij een aantal volledig geopende kleppen.

Antwoord $D = \frac{225}{n+5}$ minuten, voor gehele n van 0 tot en met 20.

b Omdat $n + 5$ positief is, volgt uit $\frac{225}{n+5} \le 15$ dat $225 \le 15(n + 5)$.

Hieruit volgen $15 \le n + 5$ en $n \ge 10$.

Voor $n = 10$ is $D = \frac{225}{15} = 15$ minuten. Voor $n = 9$ is $D = \frac{225}{14}$, dus meer dan 15 minuten.

Een groter aantal kleppen maakt de positieve noemer groter en de duur kleiner. Het gehele aantal 10 is daarom het minimum en valt binnen het modeldomein.

Antwoord Er moeten minimaal 10 kleppen volledig openstaan.

Alternatief: Zoek eerst het grensgeval $D = 15$. Dat geeft $n = 10$. Controle van $n = 9$ en de daling van D bevestigt het minimum.

6 Gemiddeld bedrag per abonnement

a Vervang zowel K als n: $A = \frac{60+2{,}4(25+5t)}{25+5t}$.

De teller is 60 + 60 + 12t = 120 + 12t. Dus $A = \frac{120+12t}{25+5t}$.

Een andere vereenvoudiging is $A = 2{,}4 + \frac{60}{25+5t} = 2{,}4 + \frac{12}{t+5}$.

De oorspronkelijke deler n is minstens 25 binnen het opgegeven domein en is nooit nul.

Antwoord $A = 2{,}4 + \frac{12}{t+5}$, voor gehele t van 0 tot en met 12.

Alternatief: De gelijkwaardige breuk $A = \frac{120+12t}{25+5t}$ is eveneens correct.

b K is een bedrag in euro en n telt abonnementen. A heeft dus de eenheid euro per abonnement.

Bij t = 0 zijn er al n = 25 abonnementen en zijn de kosten K = 60 + 2,4 × 25 = 120 euro.

Daarom is $A = \frac{120}{25} = 4{,}8$ euro per abonnement. De gecombineerde formule geeft ook $2{,}4 + \frac{12}{5} = 4{,}8$.

Nul dagen betekent het meetbegin, niet nul abonnementen. De invoer is geldig.

Antwoord A wordt gemeten in euro per abonnement. De bewering is onjuist: A(0) = 4,80 euro per abonnement.

Van tekst naar formule

7 Panelen laten snijden

a De totale oppervlakte materiaal is 1,2n m^2. Vermenigvuldigen met 2,50 euro per m^2 geeft M = 2,50 × 1,2n = 3n euro.

Per paneel wordt 0,80 euro bewerking betaald. Daarom is B = 0,80n euro.

Beide kosten gelden voor gehele aantallen panelen van 1 tot en met 100.

Antwoord M = 3n en B = 0,80n, beide in euro.

b Het totaal bestaat uit voorbereiding, materiaal en bewerking: C = 14 + 3n + 0,80n.

Samenvoegen geeft C = 14 + 3,80n.

Voor n = 25 is C = 14 + 3,80 × 25 = 109 euro.

Antwoord C = 14 + 3,80n. Een bestelling van 25 panelen kost 109 euro.

7 Panelen laten snijden (vervolg)

c Voor het budget geldt $14 + 3{,}80n \leq 90$. Daarom is $3{,}80n \leq 76$ en $n \leq 20$.

Bij $n = 20$ zijn de kosten precies 90 euro. Bij $n = 21$ zijn de kosten 93,80 euro.

Alleen gehele panelen kunnen worden besteld, en 20 ligt binnen $1 \leq n \leq 100$.

Antwoord Er kunnen maximaal 20 panelen worden besteld.

8 Toegangscodes verkopen

a Na 10% korting blijft 90% van de inkoopprijs over: $0{,}90 \times 4{,}50 = 4{,}05$ euro per code.

De vaste orderkosten worden eenmaal toegevoegd: $C = 9 + 4{,}05n$.

De formule geldt voor gehele n van 1 tot en met 80 en C is in euro.

Antwoord $C = 9 + 4{,}05n$.

b De opbrengst is $6{,}50n$ euro. Dus $W = 6{,}50n - (9 + 4{,}05n) = 2{,}45n - 9$.

Een positief resultaat betekent $2{,}45n - 9 > 0$, dus $n > \frac{9}{2{,}45} = \frac{180}{49}$.

Deze grens ligt tussen 3 en 4. Bij $n = 3$ is $W = -1{,}65$ euro; bij $n = 4$ is $W = 0{,}80$ euro.

Alle codes worden verkocht en n moet een geheel getal zijn.

Antwoord $W = 2{,}45n - 9$. Er moeten minimaal 4 codes worden verkocht.

9 Een wand met overlap

a De som van de oppervlakten van de losse doeken is $1{,}20nh$ m^2.

Elke van de $n - 1$ aansluitingen telt een strook van $0{,}06h$ m^2 dubbel. Die oppervlakte moet eenmaal worden afgetrokken.

$A = 1{,}20nh - 0{,}06(n - 1)h = 1{,}20nh - 0{,}06nh + 0{,}06h$.

Samenvoegen geeft $A = (1{,}14n + 0{,}06)h$. De formule geldt voor gehele n van 1 tot en met 15 en $h > 0$.

Antwoord $A = (1{,}14n + 0{,}06)h$ m^2.

Alternatief: De zichtbare breedte is $1{,}20n - 0{,}06(n - 1) = 1{,}14n + 0{,}06$ m. Vermenigvuldig deze breedte met h.

b $A = (1{,}14 \times 8 + 0{,}06) \times 2 = 9{,}18 \times 2 = 18{,}36$ m^2.

De totale doekoppervlakte is $8 \times 1{,}20 \times 2 = 19{,}20$ m^2.

Er zijn 7 aansluitingen. De dubbel getelde overlap is $7 \times 0{,}06 \times 2 = 0{,}84$ m^2.

De controle is $19{,}20 - 0{,}84 = 18{,}36$ m^2. Beide invoerwaarden voldoen aan het domein.

Antwoord De zichtbare oppervlakte is 18,36 m^2.

10 Kasten in een archiefruimte

a De kastdelen vragen samen 1,05n m. De tussenruimten vragen 0,06(n − 1) m.

De twee eindruimten vragen samen 0,80 m. Dus B = 1,05n + 0,06(n − 1) + 0,80.

Uitwerken geeft B = 1,11n + 0,74. De formule geldt voor positieve gehele n.

Antwoord B = 1,11n + 0,74 m, voor n = 1, 2, 3, enzovoort.

b Er geldt 1,11n + 0,74 ≤ 7,50. Dus $n \leq \frac{6{,}76}{1{,}11}$, ongeveer 6,09.

Omdat n een aantal volledige delen is, is het grootste mogelijke aantal 6.

Controle: B(6) = 1,11 × 6 + 0,74 = 7,40 m. B(7) = 8,51 m.

Zes delen gebruiken minder dan 7,50 m; zeven delen gebruiken meer. Het model wordt alleen bij n ≥ 1 gebruikt.

Antwoord Er passen maximaal 6 volledige kastdelen. Er blijft 0,10 m wandlengte over naast alle verplichte ruimten.

11 Een kleurmengsel verdunnen

a Het totale aantal gram pigment is 3,5 × 18 = 63. Water voegt geen pigment toe, dus dit aantal blijft 63.

Het totale volume is 3,5 + x liter.

Volgens de definitie van concentratie is $c = \frac{63}{3{,}5+x}$. De noemer is positief in het domein 0 ≤ x ≤ 7.

Antwoord Er blijft 63 gram pigment aanwezig. De concentratie is $c = \frac{63}{3{,}5+x}$ gram per liter.

b Stel $\frac{63}{3{,}5+x} = 9$. Omdat het totale volume positief is, geeft dit 63 = 9(3,5 + x).

Dus 7 = 3,5 + x en x = 3,5 liter.

Het totale volume is dan 7 liter en 63 gram verdeeld over 7 liter geeft 9 gram per liter.

De benodigde toevoeging valt binnen 0 ≤ x ≤ 7.

Antwoord Er moet 3,5 liter water worden toegevoegd.

12 Een bestelling bij een fotokiosk

a De afbeeldingskosten vóór korting zijn $6 \times 0{,}18n = 1{,}08n$ euro.

Na 15% korting resteert $0{,}85 \times 1{,}08n = 0{,}918n$ euro.

Papier kost $0{,}60n$ euro en verwerking 4 euro. Daarom is $K = 4 + 0{,}60n + 0{,}918n = 4 + 1{,}518n$.

De formule geeft het ongeronde bedrag bij gehele n van 1 tot en met 50.

Antwoord $K = 4 + 1{,}518n$ euro; rond het uiteindelijke bedrag af op centen.

b De grens voor het ongeronde bedrag is $4 + 1{,}518n \leq 25$. Dus $n \leq \frac{21}{1{,}518}$, ongeveer 13,83.

Het grootste gehele aantal onder die grens is 13.

Controle met de werkelijk te betalen bedragen: K(13) = 23,734, afgerond 23,73 euro. K(14) = 25,252, afgerond 25,25 euro.

Het tarief per vel is positief, zodat grotere aantallen duurder zijn. Afronden op centen verandert hier het maximum niet.

Antwoord Er kunnen maximaal 13 volledige vellen worden besteld.

Een model aanpassen

13 Andere tarieven voor opslagvakken

a De vaste kosten worden $50 \times 1{,}20 = 60$ euro.

Van het tarief per vak blijft 85% over: $6 \times 0{,}85 = 5{,}10$ euro.

De twee wijzigingen raken verschillende onderdelen. Daarom is $N = 60 + 5{,}10n$, voor gehele n van 1 tot en met 40.

Antwoord De nieuwe kostenformule is $N = 60 + 5{,}10n$ euro.

b $N - K = (60 + 5{,}10n) - (50 + 6n) = 10 - 0{,}90n$.

Nieuwe kosten zijn lager als $10 - 0{,}90n < 0$, dus $n > \frac{10}{0{,}90} = \frac{100}{9}$.

De grens ligt tussen 11 en 12. Voor $n = 11$ is $N - K = 0{,}10$ euro; voor $n = 12$ is $N - K = -0{,}80$ euro.

Het verschil neemt af met n. Daarom zijn de nieuwe kosten vanaf het gehele aantal 12 lager, binnen het opgegeven domein.

Antwoord $N - K = 10 - 0{,}90n$. Vanaf 12 vakken zijn de nieuwe kosten lager.

14 Een ander dalingsmodel

a De nieuwe beginhoogte is 28 cm.

De oorspronkelijke dalingssnelheid is 0,8 cm per minuut. 75% daarvan is 0,75 × 0,8 = 0,6 cm per minuut.

Omdat het water daalt, wordt het hoogteverloop G = 28 − 0,6t.

Op 0 ≤ t ≤ 40 ligt G tussen 28 en 4 cm; het model geeft geen negatieve hoogte.

Antwoord G = 28 − 0,6t cm, voor 0 ≤ t ≤ 40.

b Gelijke hoogte betekent 32 − 0,8t = 28 − 0,6t.

Daaruit volgt 4 = 0,2t en t = 20 minuten.

H(20) = 32 − 16 = 16 cm. Ook G(20) = 28 − 12 = 16 cm.

De tijd 20 ligt in het domein van beide modellen.

Antwoord Na 20 minuten zijn beide waterkolommen 16 cm hoog.

15 Een gewijzigde scanopdracht

a De nieuwe snelheid is 2,5 × 1,40 = 3,5 pagina per seconde.

Het totaal te scannen pagina's is 6n + 18. De scantijd is daarom $\frac{6n+18}{3,5}$ seconden.

De opstarttijd van 8 seconden wordt apart toegevoegd: U = 8 + $\frac{6n+18}{3,5}$.

Deze formule geldt voor dezelfde gehele aantallen 0 ≤ n ≤ 20; de constante deler 3,5 is positief.

Antwoord U = 8 + $\frac{6n+18}{3,5}$ seconden.

b De oude tijd is T = $\frac{4 \times 10 + 18}{2,5} = \frac{58}{2,5}$ = 23,2 seconden.

De nieuwe tijd is U = 8 + $\frac{6 \times 10 + 18}{3,5}$ = 8 + $\frac{78}{3,5}$, ongeveer 30,3 seconden.

De nieuwe opdracht bevat 20 pagina's meer dan de oude en krijgt 8 seconden extra opstarttijd. Die wijzigingen wegen hier zwaarder dan de grotere scansnelheid.

Antwoord Bij 10 bestanden duurt de oude opdracht 23,2 seconden en de nieuwe ongeveer 30,3 seconden. De nieuwe opdracht duurt ongeveer 7,1 seconden langer.

16 Een route met een omleiding

a De vaste kosten worden 45 + 12 = 57 euro.

Het nieuwe kilometerbedrag is 1,20 × 0,90 = 1,08 euro per km. Dit tarief geldt voor de hele nieuwe afstand d + 8.

$N = 57 + 1{,}08(d + 8) = 57 + 1{,}08d + 8{,}64$.

Dus $N = 65{,}64 + 1{,}08d$, voor $20 \leq d \leq 250$.

Antwoord $N = 65{,}64 + 1{,}08d$ euro.

b Het verschil is $N - C = (65{,}64 + 1{,}08d) - (45 + 1{,}20d) = 20{,}64 - 0{,}12d$.

Gelijke bedragen geven $20{,}64 - 0{,}12d = 0$, dus $d = 172$ km.

De nieuwe kosten zijn lager als $20{,}64 - 0{,}12d < 0$, dus $d > 172$.

Bij $d = 172$ is $C = 45 + 1{,}20 \times 172 = 251{,}40$ euro. De nieuwe werkelijk gereden afstand is 180 km en $57 + 1{,}08 \times 180 = 251{,}40$ euro.

Beperk de vergelijking tot het gegeven modeldomein.

Antwoord Bij een geplande afstand van 172 km zijn de kosten gelijk. De nieuwe kosten zijn lager voor $172 < d \leq 250$ km.

17 Een pomp met naspoelen

a De pomp verplaatst nu V + 6 liter: de afgeleverde hoeveelheid plus het naspoelwater.

Bij 15 liter per minuut duurt dat $\frac{V+6}{15}$ minuten. De voorbereiding wordt erbij opgeteld.

$U = \frac{V+6}{15} + 2{,}5 = \frac{V}{15} + 0{,}4 + 2{,}5 = \frac{V}{15} + 2{,}9$.

De formule geldt voor $0 \leq V \leq 300$; de constante deler is positief.

Antwoord $U = \frac{V}{15} + 2{,}9$ minuten.

b $T - U = \frac{V}{12} + 4 - \frac{V}{15} - 2{,}9$.

Het verschil van de breuken is $\frac{5V-4V}{60} = \frac{V}{60}$. Daarom is $T - U = \frac{V}{60} + 1{,}1$.

Bij $V = 90$ is de tijdwinst $\frac{90}{60} + 1{,}1 = 2{,}6$ minuten.

Bij $V = 30$ is de tijdwinst $\frac{30}{60} + 1{,}1 = 1{,}6$ minuten. Beide volumes liggen in het domein.

Antwoord De bewering is onjuist. De tijdwinst is $\frac{V}{60} + 1{,}1$ minuten en is alleen bij $V = 90$ liter precies 2,6 minuten.

18 Een gewijzigd rekenmodel

a 20% minder rekenwerk maakt de teller 150 × 0,80 = 120.

Met drie aanwezige modules wordt het totale aantal n + 3.

De starttijd wordt eenmaal apart toegevoegd. Dus $B = \frac{120}{n+3} + 0{,}5$.

Voor de toegestane gehele n is n + 3 minstens 3 en nooit nul.

Antwoord $B = \frac{120}{n+3} + 0{,}5$ seconden, voor gehele n van 0 tot en met 24.

b De eis is $\frac{120}{n+3} + 0{,}5 \leq 8$, dus $\frac{120}{n+3} \leq 7{,}5$.

De noemer is positief, zodat $120 \leq 7{,}5(n + 3)$. Dit geeft $n + 3 \geq 16$ en $n \geq 13$.

Bij n = 13 is B = 7,5 + 0,5 = 8 seconden. Bij n = 12 is B = 8 + 0,5 = 8,5 seconden.

Een grotere positieve noemer maakt de variabele tijd kleiner. Alleen gehele modules zijn toegestaan en 13 ligt in het domein.

Antwoord Er zijn minimaal 13 toegevoegde modules nodig.

Een formule controleren

19 Lengtematen bij een coating

a Het tarief 0,15 hoort bij één vierkante meter, terwijl 120n × 80 een oppervlakte in vierkante centimeter geeft. Die eenheden passen niet bij elkaar.

De lengte is 1,20n m en de breedte is 0,80 m. De oppervlakte is daarom 0,96n m^2.

Het verbruik wordt V = 0,15 × 0,96n = 0,144n liter.

De formule geldt alleen voor gehele n van 0 tot en met 12.

Antwoord V = 0,144n liter. Voor een tarief per m^2 moeten de gebruikte lengtes eerst in meter staan.

Alternatief: Bereken eerst 9600n cm^2 en deel door 10 000 om 0,96n m^2 te krijgen.

b Bij n = 0 is V = 0,144 × 0 = 0 liter. Er is dan volgens de context geen strook en dus geen te coaten oppervlakte.

Bij n = 5 is V = 0,144 × 5 = 0,72 liter.

Rechtstreekse controle: vijf segmenten geven 6 m lengte; de oppervlakte is 6 × 0,80 = 4,80 m^2 en het verbruik is 4,80 × 0,15 = 0,72 liter.

Antwoord Bij nul segmenten is het verbruik nul liter. Bij vijf segmenten is 0,72 liter nodig.

20 Gemiddeld vloeistofgebruik

a De teller 750 + 25n is een hoeveelheid in ml. De noemer 3n is het aantal onderdelen.

Het gemiddelde A heeft daarom de eenheid ml per onderdeel.

Bij n = 0 wordt de noemer 3n gelijk aan nul. Bovendien zijn er dan geen onderdelen om een gemiddelde per onderdeel voor te bepalen.

Antwoord A heeft de eenheid ml per onderdeel. n = 0 is uitgesloten omdat delen door nul niet kan en er dan geen onderdelen zijn.

b Bij n = 1 is $A = \frac{775}{3} = 258\frac{1}{3}$ en $B = 250 + \frac{25}{3} = 258\frac{1}{3}$, beide in ml per onderdeel.

Bij n = 2 is $A = \frac{800}{6} = 133\frac{1}{3}$, terwijl $B = 250 + \frac{50}{3} = 266\frac{2}{3}$.

Een gelijk resultaat bij n = 1 bewijst geen gelijkwaardigheid voor alle n. Het verschil bij de geldige invoer n = 2 bewijst dat B niet gelijkwaardig is aan A.

Correct splitsen van de teller geeft $A = \frac{250}{n} + \frac{25}{3}$, voor de toegestane positieve gehele n.

Antwoord B is onjuist als alternatief. De twee formules vallen bij n = 1 toevallig samen, maar bij n = 2 niet.

21 Een bak vullen

a De bodemoppervlakte is 80 × 40 = 3200 cm^2. Vermenigvuldigen met een hoogte in cm geeft cm^3, geen liter.

Omdat 1000 cm^3 gelijk is aan 1 liter, is $V = \frac{3200(2+0{,}5t)}{1000}$.

V = 3,2(2 + 0,5t) = 6,4 + 1,6t liter.

Antwoord W geeft het volume in cm^3. De juiste formule in liter is V = 6,4 + 1,6t.

b De tijd begint bij t = 0. De waterhoogte mag niet hoger dan 12 cm worden.

Uit 2 + 0,5t ≤ 12 volgt t ≤ 20. Het modeldomein is dus 0 ≤ t ≤ 20.

Bij t = 22 geeft de formule V = 6,4 + 1,6 × 22 = 41,6 liter.

De bakinhoud is 80 × 40 × 12 = 38 400 cm^3, dus 38,4 liter. De berekende 41,6 liter past niet in deze bak.

Antwoord Het geldige domein is 0 ≤ t ≤ 20 minuten. t = 22 ligt erbuiten en levert geen passend volume in de bak.

21 Een bak vullen (vervolg)

c Bij t = 0 is V = 6,4 liter. Rechtstreeks geeft een hoogte van 2 cm: $80 \times 40 \times 2 = 6400$ cm^3 = 6,4 liter.

Bij t = 20 is $V = 6{,}4 + 1{,}6 \times 20 = 38{,}4$ liter.

De directe inhoud van een volle bak is $80 \times 40 \times 12 = 38\,400$ cm^3 = 38,4 liter.

Beide gekozen tijdstippen zijn toegestaan; het tweede is het boveneindpunt van het domein.

Antwoord De formule klopt bij beide bijzondere waarden: 6,4 liter aan het begin en 38,4 liter bij een volle bak.

22 Een route-index

a Elke d moet worden vervangen door 3t, dus $I = \frac{100 \times 3t}{3t+40} = \frac{300t}{3t+40}$. De leerling vergat deze vervanging in de noemer.

In de oorspronkelijke formule wordt een afstand door een afstand gedeeld. Die verhouding is dimensieloos; na vermenigvuldiging met 100 wordt de uitkomst als percentage weergegeven. Het is geen afstand in km.

De factor 3 bij t heeft de eenheid km per uur. Alleen 3t en 40 km kunnen worden opgeteld. In t + 40 worden uren en km door elkaar gehaald.

Bij $t \geq 0$ is de juiste noemer 3t + 40 minstens 40 en dus nooit nul.

Antwoord De juiste formule is $I = \frac{300t}{3t+40}$. I is een percentagegetal, geen aantal km; de noemer is positief voor $t \geq 0$.

b Bij t = 0 geven zowel I als J de waarde 0. In beide formules wordt de teller dan nul terwijl de noemer niet nul is.

Bij t = 10 geeft de juiste formule $I = \frac{3000}{70}$, ongeveer 42,9%. De leerlingformule geeft $J = \frac{3000}{50}$ = 60,0%.

Omdat t = 10 een geldige invoer is en de uitkomsten verschillen, zijn de formules niet gelijkwaardig.

Eén overeenkomende uitkomst is een nuttige controle, maar geen bewijs dat twee formules voor alle geldige invoerwaarden gelijk zijn.

Antwoord De controle bij nul ontdekt deze fout niet. Bij 10 uur is de juiste index ongeveer 42,9%, terwijl de leerling 60,0% krijgt.

Uitwerkingen · Herhaling

1 Uitdrukkingen vergelijken

a Het product $(2x - 5)(x + 3)$ is $2x^2 + 6x - 5x - 15 = 2x^2 + x - 15$.

Het minteken voor het product geeft $-2x^2 - x + 15$. Het andere product is $3x - 6$.

Samenvoegen geeft $-2x^2 + 2x + 9$.

Antwoord $-2x^2 + 2x + 9$.

Alternatief: Je kunt eerst $-(2x - 5)$ vervangen door $-2x + 5$ en daarna de twee factoren vermenigvuldigen.

b De termen met u^2 geven $3u^2$.

De termen met u geven 4u; de losse getallen geven -5.

Antwoord $3u^2 + 4u - 5$.

c $12r^2$ en $-18r$ hebben de factor 6r gemeenschappelijk.

$12r^2 \div 6r$ geeft 2r en $-18r \div 6r$ geeft -3 als herkenning van de resterende factoren. Door terugvermenigvuldigen krijg je de oorspronkelijke uitdrukking, ook bij $r = 0$.

Antwoord $12r^2 - 18r = 6r(2r - 3)$.

Alternatief: $6(2r^2 - 3r)$ is eveneens correct bij deze vraagformulering: 6 is de grootst mogelijke gemeenschappelijke gehele getalfactor. De vorm met 6r buiten haakjes neemt bovendien de gemeenschappelijke letterfactor mee.

d Bij $v = -2$ geeft de linkerkant $4(-5) + 6 = -14$; de rechterkant is $-10 - 4 = -14$.

Bij $v = 3$ geeft de linkerkant $4 \times 5 - 9 = 11$; de rechterkant is $15 - 4 = 11$.

Algemeen is $4(2v - 1) - 3v = 8v - 4 - 3v = 5v - 4$.

Antwoord De herschrijving is juist voor elke v. De twee invulcontroles ondersteunen dit; de algebraïsche stappen verantwoorden het algemeen.

e De teller is $5w(3w + 2)$.

De oorspronkelijke noemer 5w mag niet 0 zijn, dus $w \neq 0$.

Voor die waarden kun je de gemeenschappelijke factor 5w schrappen.

Antwoord $3w + 2$, met $w \neq 0$.

Alternatief: Splits de teller in twee breuken: $\frac{15w^2}{(5w)} + \frac{10w}{(5w)} = 3w + 2$, met $w \neq 0$.

1 Uitdrukkingen vergelijken (vervolg)

f De noemer $z - 4$ sluit $z = 4$ uit.

De noemer $z + 5$ in de deler sluit $z = -5$ uit.

De deler is 0 bij $z = 1$; ook die waarde is uitgesloten.

Antwoord $z \neq 4$, $z \neq -5$ en $z \neq 1$.

2 Vijf berekeningen

a Een gemeenschappelijke noemer is $6p$.

$\frac{3}{(2p)} = \frac{9}{(6p)}$ en $\frac{5}{(3p)} = \frac{10}{(6p)}$. Tel de tellers op.

Antwoord $\frac{19}{6p}$, met $p \neq 0$.

b De eerste twee breuken geven $\frac{60q}{(15q)} = 4$.

Delen door $\frac{4q}{7}$ is vermenigvuldigen met $\frac{7}{(4q)}$.

$4 \times \frac{7}{(4q)} = \frac{7}{q}$. De noemer $3q$ en de teller $4q$ van de oorspronkelijke deler vereisen $q \neq 0$.

Antwoord $\frac{7}{q}$, met $q \neq 0$.

Alternatief: Vermenigvuldig in één keer met de omgekeerde deler: $(\frac{6q}{5}) \times (\frac{10}{(3q)}) \times (\frac{7}{(4q)}) = \frac{7}{q}$.

c $(h^3)^2 = h^6$.

$h^6 \times h^4 = h^{10}$.

$\frac{h^{10}}{h^5} = h^5$; de oorspronkelijke noemer verlangt $h \neq 0$.

Antwoord h^5, met $h \neq 0$.

d Een negatieve exponent geeft het omgekeerde: $(2k)^{-3} = \frac{1}{(2k)^3}$.

$(2k)^3 = 8k^3$. Het grondtal $2k$ moet niet 0 zijn.

Antwoord $\frac{1}{8k^3}$, met $k \neq 0$.

2 Vijf berekeningen (vervolg)

e Omdat $\frac{9m}{4} \geq 0$ moet $m \geq 0$ zijn.

Bij $m \geq 0$ kun je de wortel schrijven als $\sqrt{9} \times \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{4}}$.

$\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{4} = 2$.

Antwoord $\frac{3\sqrt{m}}{2}$, met $m \geq 0$.

3 Meten en verdelen

a Bij $t = 9$ is $d = 6 \times 3 = 18$ meter.

Bij $t = 4$ is $d = 12$ meter; bij $t = 16$ is $d = 24$ meter.

De tijd wordt vier keer zo groot en de wortel twee keer zo groot. Daarom verdubbelt de afstand.

Antwoord Na 9 seconden is $d = 18$ meter. De verdubbeling van 12 naar 24 meter past bij de wortelformule.

b Trek $4x$ van beide kanten af: $5y = 45 - 4x$.

Deel beide kanten door 5: $y = 9 - (\frac{4}{5})x$.

Antwoord $y = -0{,}8x + 9$.

Alternatief: De equivalente vorm $y = -\frac{4}{5}x + 9$ is ook goed.

c Vermenigvuldig met n: $Vn = 72$.

Omdat $V > 0$ kun je door V delen: $n = \frac{72}{V}$.

n is een positief geheel getal en $V > 0$.

Antwoord $n = \frac{72}{V}$, met $V > 0$ en n een positief geheel getal.

d $n = \frac{72}{12} = 6$ porties.

Invullen in $V = \frac{72}{n}$ geeft $V = \frac{72}{6} = 12$ mL.

De oorspronkelijke en de omgewerkte formule geven bij deze toegestane invoer dezelfde hoeveelheid.

Antwoord De controle klopt: 6 porties van 12 mL zijn mogelijk.

3 Meten en verdelen (vervolg)

e De berekende waarde $\frac{72}{5} = 14{,}4$ voldoet wel aan $n > 0$.

Maar n moet een geheel aantal gelijke porties voorstellen; 14,4 is niet geheel.

Antwoord Nee. De invoer V = 5 mL geeft geen bruikbare verdeling van alle 72 mL in een geheel aantal gelijke porties.

4 Verzendservice

a Vervang M: $C = 4(nm + 2) + 7 = 4nm + 15$.

Vervang m: $C = 4n(0{,}6 + 0{,}02n) + 15$.

Werk het product uit: $C = 0{,}08n^2 + 2{,}4n + 15$.

Antwoord $C = 0{,}08n^2 + 2{,}4n + 15$ euro.

Alternatief: Je kunt eerst $M = 0{,}02n^2 + 0{,}6n + 2$ afleiden en die uitdrukking in de kostenformule vervangen.

b Het bedrag voor n pakketten is 3,20n euro.

Het vaste bedrag van 5 euro komt erbij.

Antwoord $R = 3{,}20n + 5$ euro.

c De nieuwe massa is $M = n(0{,}6 + 0{,}02n) + 3$.

De nieuwe kosten zijn $C = 4{,}5[n(0{,}6 + 0{,}02n) + 3] + 7$.

Uitwerken geeft $C = 0{,}09n^2 + 2{,}7n + 20{,}5$.

Antwoord $C = 0{,}09n^2 + 2{,}7n + 20{,}5$ euro.

d n is een aantal zonder eenheid; nm en 2 zijn massa's in kg.

4 heeft de eenheid euro per kg. Daardoor is 4(nm + 2) een bedrag in euro; 7 is ook in euro.

Bij n = 0 is C = 15 euro: 4 × 2 euro voor de kratmassa en 7 euro vast. Dit is ook de constante term van de formule uit a.

Antwoord De eenheden zijn consistent. Bij een lege batch rekent dit model 15 euro voor de krat en het vaste bedrag.

Uitwerkingen · Gericht verder oefenen

5 Opnieuw beginnen

a $-2(x - 4) = -2x + 8$.

$(x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$.

Samen is dit $x^2 - x + 6$.

Antwoord $x^2 - x + 6$.

b $8a^2 - 5a^2 = 3a^2$.

$-4a - 2a = -6a$ en $3 - 7 = -4$.

Antwoord $3a^2 - 6a - 4$.

c De gemeenschappelijke getalfactor is 5; beide termen bevatten ook b.

$20b^2 + 15b = 5b(4b + 3)$.

Terugvermenigvuldigen geeft $20b^2 + 15b$, ook als $b = 0$.

Antwoord $5b(4b + 3)$.

d Bij $c = 2$ geeft de linkerkant $3 \times 5 - 8 = 7$; de voorgestelde rechterkant geeft 5.

De juiste herleiding is $6c + 3 - 4c = 2c + 3$.

Invullen van $c = 2$ in de verbeterde uitdrukking geeft 7.

Antwoord De gegeven herschrijving is onjuist. Juist is $3(2c + 1) - 4c = 2c + 3$.

e De teller is $7d(2d - 3)$.

De oorspronkelijke noemer is $7d$, dus $d \neq 0$.

Schrap $7d$ in teller en noemer voor de toegestane waarden.

Antwoord $2d - 3$, met $d \neq 0$.

6 Nog een ronde

a $\frac{5}{(6x)} = \frac{10}{(12x)}$ en $\frac{1}{(4x)} = \frac{3}{(12x)}$.

Aftrekken geeft $\frac{(10 - 3)}{(12x)}$.

Antwoord $\frac{7}{12x}$, met $x \neq 0$.

6 Nog een ronde (vervolg)

b De eerste twee breuken geven $\frac{12y}{(8y)} = \frac{3}{2}$.

Vermenigvuldig met $\frac{6}{y}$: $(\frac{3}{2}) \times (\frac{6}{y}) = \frac{9}{y}$.

$y \neq 0$ blijft nodig voor de oorspronkelijke noemer en voor de deler.

Antwoord $\frac{9}{y}$, met $y \neq 0$.

c De noemers sluiten $z = 2$ en $z = -1$ uit.

De teller van de deler is 0 bij $z = -4$. Dan deel je door 0.

Antwoord $z \neq 2$, $z \neq -1$ en $z \neq -4$.

d $(p^2)^3 = p^6$.

$p^6 \times p = p^7$.

$\frac{p^7}{p^4} = p^3$; $p \neq 0$ blijft nodig.

Antwoord p^3, met $p \neq 0$.

e $q^{-2} = \frac{1}{q^2}$, met $q \neq 0$.

De factor 5 blijft in de teller staan.

Antwoord $\frac{5}{q^2}$, met $q \neq 0$.

7 Met een tussenstap

a Voor reële waarden moet $r \geq 0$ zijn.

De wortel is $\sqrt{16} \times \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{r}}{3}$.

Antwoord $\frac{4\sqrt{r}}{3}$, met $r \geq 0$.

b Bij $t = 4$ is $S = 5 \times 2 = 10$ meter.

Bij $t = 25$ is $S = 5 \times 5 = 25$ meter.

25 minuten is langer dan 4 minuten; de afstand wordt groter. De tijd wordt $\frac{25}{4}$ keer zo groot en de afstand $\frac{5}{2}$ keer zo groot, zoals de wortelvorm voorspelt.

Antwoord $S = 10$ meter en $S = 25$ meter. De verandering is plausibel.

7 Met een tussenstap (vervolg)

c $3y = 27 - 6x$.

Delen door 3 geeft $y = 9 - 2x$.

Antwoord $y = -2x + 9$.

d Trek 2 af: $h - 2 = 3\sqrt{t}$.

Deel door 3: $\frac{(h-2)}{3} = \sqrt{t}$.

Omdat $h \geq 2$ zijn beide kanten niet-negatief. Kwadrateren geeft $t = [\frac{(h-2)}{3}]^2$.

Antwoord $t = \frac{(h-2)^2}{9}$, met $h \geq 2$ en $t \geq 0$.

Alternatief: De schrijfwijze $t = (\frac{(h-2)}{3})^2$ is gelijkwaardig.

e $t = \frac{(11-2)^2}{9} = \frac{81}{9} = 9$ minuten.

De oorspronkelijke formule geeft $h = 3\sqrt{9} + 2 = 11$ cm.

$h = 11$ is toegestaan, want $h \geq 2$.

Antwoord De controle klopt: $t = 9$ minuten hoort bij $h = 11$ cm.

f De uitkomst $t = 9$ voldoet aan $t \geq 0$.

Maar 9 is groter dan de bovengrens 8 minuten van deze meting.

Antwoord Nee. De hoogte van 11 cm wordt volgens het model pas na het toegestane meetinterval bereikt.

8 De pakketbalie

a $C = 6(0{,}25n + 1) + 8$.

Uitwerken geeft $C = 1{,}5n + 6 + 8$.

Antwoord $C = 1{,}5n + 14$ euro.

b Het variabele deel voor n pakketten is $4n$ euro.

Het vaste deel is 2 euro.

Antwoord $R = 4n + 2$ euro.

c De nieuwe massa is $M = 0{,}25n + 1{,}5$.

$C = 7(0{,}25n + 1{,}5) + 8$.

Uitwerken geeft $C = 1{,}75n + 10{,}5 + 8$.

Antwoord $C = 1{,}75n + 18{,}5$ euro.

8 De pakketbalie (vervolg)

d 7 euro per kg × (0,25n + 1,5) kg is een bedrag in euro; daar komt 8 euro bij.

Bij n = 0 geeft de nieuwe formule C = 18,5 euro.

Rechtstreeks rekenen geeft 7 × 1,5 + 8 = 18,5 euro: verpakking en vaste kosten.

Antwoord De eenheden kloppen. Bij n = 0 zijn de kosten 18,50 euro.

Uitwerkingen · Nieuwe controle

9 Nieuwe controle I

a $(x - 2)(2x + 1) = 2x^2 - 3x - 2$.

Het minteken en de andere termen geven $-2x^2 + 3x + 2 + 4x - 3$.

Antwoord $-2x^2 + 7x - 1$.

b $18y^2 - 12y = 6y(3y - 2)$.

De noemer vereist $y \neq 0$.

Voor die waarden kun je $6y$ schrappen.

Antwoord De teller is $6y(3y - 2)$; de breuk is $3y - 2$, met $y \neq 0$.

c De som is $\frac{3}{(6z)} + \frac{2}{(6z)} = \frac{5}{(6z)}$.

Vermenigvuldigen met $\frac{3z}{5}$ geeft $\frac{1}{2}$. Delen door $\frac{(z-1)}{2}$ geeft $\frac{1}{(z-1)}$.

De noemers $2z$ en $3z$ vereisen $z \neq 0$; de deler mag niet 0 zijn, dus $z \neq 1$.

Antwoord $\frac{1}{z-1}$, met $z \neq 0$ en $z \neq 1$.

d $(p^2)^2 = p^4$.

$p^4 \times \frac{p^{-1}}{p^5} = p^{4-1-5} = p^{-2}$.

$p^{-2} = \frac{1}{p^2}$. De negatieve exponent en de oorspronkelijke noemer vereisen $p \neq 0$.

Antwoord $\frac{1}{p^2}$, met $p \neq 0$.

e Voor $t \geq 0$ is $L = \sqrt{49} \times \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{4}} = \frac{7\sqrt{t}}{2}$.

Bij $t = 16$ is $L = 14$ meter en bij $t = 4$ is $L = 7$ meter.

De tijd wordt viermaal zo groot, terwijl de afstand verdubbelt. Dat past bij de wortelvorm.

Antwoord $L = \frac{7\sqrt{t}}{2}$; bij $t = 16$ is $L = 14$ meter en de vergelijking met $t = 4$ is plausibel.

f Bij $q = -1$ geeft links $2(-4) + 1 = -7$ en rechts $-5 - 2 = -7$.

Algemeen is links $6q - 2 - q = 5q - 2$.

Antwoord De gelijkheid is juist voor elke q; de algemene herleiding verantwoordt dit.

10 Nieuwe controle II

a $2y = 31 - 7x$.

Delen door 2 geeft $y = 15{,}5 - 3{,}5x$.

Antwoord $y = -3{,}5x + 15{,}5$.

Alternatief: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{31}{2}$ is ook goed.

b Uit $d = 4\sqrt{t}$ volgt $\frac{d}{4} = \sqrt{t}$. Omdat $d \geq 0$ en $t \geq 0$ zijn beide kanten niet-negatief.

Kwadrateren geeft $t = \frac{d^2}{16}$, met $d \geq 0$.

Bij $d = 12$ is $t = \frac{144}{16} = 9$ seconden. De oorspronkelijke formule geeft $d = 4\sqrt{9} = 12$ meter.

Antwoord $t = \frac{d^2}{16}$, met $d \geq 0$. De controle bij $d = 12$ klopt.

c Een afgelegde afstand d is in deze situatie niet-negatief. Bovendien is $4\sqrt{t} \geq 0$.

Invullen van $t = 4$ in het oorspronkelijke model geeft $d = 4 \times 2 = 8$ meter.

Antwoord Nee. $d = -8$ is niet toegestaan en $t = 4$ hoort bij $d = 8$, niet bij $d = -8$.

d $C = 5(0{,}4n + 1{,}2) + 6 = 2n + 12$.

5 euro per kg × M kg is een bedrag in euro; 6 is een bedrag in euro.

Bij $n = 0$ is $C = 12$ euro. Rechtstreeks: $5 \times 1{,}2 + 6 = 12$ euro voor de verpakking en het vaste bedrag.

Antwoord $C = 2n + 12$ euro. De eenheden en de uitkomst bij $n = 0$ kloppen.

e Aanvankelijk bestaat het bedrag uit 3n euro en 9 euro vast.

Na de wijziging bestaat het bedrag uit 4n euro en 7 euro vast.

Antwoord Aanvankelijk $R = 3n + 9$ euro; na de wijziging $R = 4n + 7$ euro.

Uitwerkingen · Test jezelf

11 Lantaarnpanelen

a $(w - 1)(w + 4) = w^2 + 3w - 4$, dus het dubbele is $2w^2 + 6w - 8$.

$(w - 1)(w + 1) = w^2 - 1$. Trek dit volledige product af.

$A = 2w^2 + 6w - 8 - w^2 + 1 = w^2 + 6w - 7$.

Antwoord $A = w^2 + 6w - 7$ cm^2.

Alternatief: Eerst $w - 1$ buiten haakjes halen geeft $A = (w - 1)[2(w + 4) - (w + 1)] = (w - 1)(w + 7)$; uitwerken geeft dezelfde uitkomst.

b $K = 3(w^2 + 6w - 7) + 2w^2 - 5w + 18$.

$K = 3w^2 + 18w - 21 + 2w^2 - 5w + 18$.

De termen geven $5w^2$, $13w$ en -3.

Antwoord $K = 5w^2 + 13w - 3$.

c De gemeenschappelijke factor is $6w$.

De resterende factoren zijn w en 2. Terugvermenigvuldigen controleert de uitdrukking.

Antwoord $6w(w + 2)$.

Alternatief: $6(w^2 + 2w)$ is eveneens correct bij deze vraagformulering: 6 is de grootst mogelijke gemeenschappelijke gehele getalfactor. De vorm met $6w$ buiten haakjes neemt bovendien de gemeenschappelijke letterfactor mee.

d Bij $w = 3$ is de oorspronkelijke oppervlakte $2 \times 2 \times 7 - 2 \times 4 = 20$ cm^2.

De formule van de medewerker geeft $9 + 15 - 7 = 17$ cm^2 en is dus onjuist.

De herleiding in a geeft $A = w^2 + 6w - 7$. De medewerker heeft de lineaire term niet correct berekend.

Antwoord De medewerkersformule is onjuist. De juiste formule geeft bij $w = 3$ de oppervlakte 20 cm^2.

12 Onderzoeksblad

a De teller is $4x(2x - 6)$.

De oorspronkelijke noemer vereist $x \neq 0$. Voor die waarden kun je $4x$ schrappen.

Antwoord $2x - 6$, met $x \neq 0$.

Alternatief: De teller kan ook als $8x(x - 3)$ worden geschreven; na schrappen krijg je $2(x - 3)$.

12 Onderzoeksblad (vervolg)

b $2x - 6 = 2(x - 3)$, zodat de eerste breuk $\frac{4}{[2(x-3)]}$ wordt.

Tel op: $\frac{[4+1]}{[2(x-3)]} = \frac{5}{[2(x-3)]}$.

Beide oorspronkelijke noemers zijn 0 bij $x = 3$.

Antwoord $\frac{5}{2(x-3)}$, met $x \neq 3$.

Alternatief: $\frac{5}{2x-6}$ is gelijkwaardig.

c De eerste twee breuken geven $\frac{3x(x+1)}{[6(x+1)]} = \frac{x}{2}$, met $x \neq -1$.

Delen door $\frac{(x-2)}{4}$ geeft $(\frac{x}{2}) \times [\frac{4}{(x-2)}] = \frac{2x}{(x-2)}$, met $x \neq 2$.

Antwoord $\frac{2x}{x-2}$, met $x \neq -1$ en $x \neq 2$.

d Bij a is $4x = 0$ als $x = 0$. Bij b zijn de oorspronkelijke noemers 0 als $x = 3$.

Bij c is $x = -1$ uitgesloten door de noemer $x + 1$. Ook $x = 2$ is uitgesloten: dan is de oorspronkelijke deler 0.

De herleiding van c schrapt $x + 1$, maar de oorspronkelijke breuk blijft bij $x = -1$ ongedefinieerd. Dat het eindresultaat daar wel berekenbaar is, vergroot het oorspronkelijke domein niet.

Antwoord a: $x \neq 0$. b: $x \neq 3$. c: $x \neq -1$ en $x \neq 2$. De oorspronkelijke beperkingen blijven geldig.

13 Testbank

a $(u^2)^3 = u^6$.

$u^6 \times u^4 = u^{10}$.

Delen door u^5 geeft u^5; $u > 0$ waarborgt een niet-nulnoemer.

Antwoord $I = u^5$.

b $3u^{-2} = \frac{3}{u^2}$ en $u^{-3} = \frac{1}{u^3}$.

Maak de noemer u^3: $\frac{3}{u^2} = \frac{3u}{u^3}$.

Optellen geeft $\frac{(3u+1)}{u^3}$.

Antwoord $Q = \frac{3u+1}{u^3}$, voor $u > 0$.

13 Testbank (vervolg)

c $\frac{36u}{25} \geq 0$ geldt precies bij $u \geq 0$.

Voor die waarden is $R = \sqrt{36} \times \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{25}} = \frac{6\sqrt{u}}{5}$.

Antwoord $R = \frac{6\sqrt{u}}{5}$. Voor deze R-formule afzonderlijk is $u \geq 0$ toegestaan; de testbank gebruikt $u > 0$.

d Bij $u = 1{,}5$ is $P = 30 \times 1{,}5^2 = 30 \times 2{,}25 = 67{,}5$ watt.

Bij $u = 1$ is $P = 30$ watt. De instelling wordt 1,5 keer zo groot en het vermogen 2,25 keer zo groot.

Omdat $1{,}5^2 = 2{,}25$ past deze factor bij de formule.

Antwoord $P = 67{,}5$ watt bij $u = 1{,}5$. De verandering ten opzichte van 30 watt is plausibel.

14 Waterproef

a $2v = 30 - 3h$.

Delen door 2 geeft $v = 15 - 1{,}5h$.

Antwoord $v = -1{,}5h + 15$, met v in liter en h in cm.

Alternatief: $v = -\frac{3}{2}h + 15$ is gelijkwaardig.

b Vermenigvuldig $f = \frac{90}{t}$ met t: $ft = 90$.

Deel door f: $t = \frac{90}{f}$.

De gegeven doorstroming is positief; $f > 0$ waarborgt zowel een niet-nulnoemer als $t > 0$.

Antwoord $t = \frac{90}{f}$, met $f > 0$.

c $t = \frac{90}{7{,}5} = 12$ minuten.

De oorspronkelijke formule geeft $f = \frac{90}{12} = 7{,}5$ liter per minuut.

Beide waarden zijn positief en dus toegestaan in dit model.

Antwoord De controle klopt: $f = 7{,}5$ liter per minuut hoort bij $t = 12$ minuten.

14 Waterproef (vervolg)

d $t = -9$ voldoet niet aan $0 \le t \le 12$ en levert geen reële $\sqrt{t}$.

$t = 9$ ligt wel in het meetinterval.

Invullen geeft $h = 2\sqrt{9} + 1 = 7$ cm.

Antwoord Alleen $t = 9$ minuten is bruikbaar bij $h = 7$ cm.

15 Avondroute

a $C = 8(0{,}3n + 1{,}5) + 4$.

Uitwerken geeft $C = 2{,}4n + 12 + 4$.

Antwoord $C = 2{,}4n + 16$ euro.

b Voor n pakketten is het variabele bedrag $6n$ euro.

De vaste 18 euro per route komt erbij.

Antwoord $R = 6n + 18$ euro.

c De gewijzigde massa is $M = 0{,}3n + 1{,}1$.

De kosten zijn $C = 9(0{,}3n + 1{,}1) + 4$.

Uitwerken geeft $C = 2{,}7n + 9{,}9 + 4$.

Antwoord $C = 2{,}7n + 13{,}9$ euro.

d 9 euro per kg × $(0{,}3n + 1{,}1)$ kg is een bedrag in euro; 4 is ook een bedrag in euro.

Bij $n = 0$ geeft de formule 13,9 euro. Rechtstreeks: $9 \times 1{,}1 + 4 = 13{,}9$ euro voor de lege kar en het vaste bedrag.

Bij $n = 10$ is $M = 3 + 1{,}1 = 4{,}1$ kg. Rechtstreeks zijn de kosten $9 \times 4{,}1 + 4 = 40{,}9$ euro; de nieuwe formule geeft $2{,}7 \times 10 + 13{,}9 = 40{,}9$ euro.

Antwoord De eenheden en beide invulcontroles kloppen. Bij $n = 0$ kost de lege route 13,90 euro; bij $n = 10$ zijn de kosten 40,90 euro.