HOOFDSTUK 4

Rekenen met letters en formules

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

haakjes wegwerken en uitdrukkingen herleiden;
rekenen met letterbreuken, machten en wortels;
formules omwerken, combineren en opstellen.

Wat weet je nog?

Maak deze opgaven eerst zelfstandig. Ze halen basisvaardigheden op die je in dit hoofdstuk nodig hebt. De uitwerkingen staan achterin deze bundel.

V1 Rekenvolgorde en negatieve getallen

a Bereken $7 - 3 \times 4$.

b Bereken $(-3) \times (-5) + 2$.

c Bereken $(-2) \times (-2)$ en $-(2 \times 2)$. Leg uit waarom de uitkomsten verschillen.

V2 Een letter in een berekening

a Bereken $5 - (-2) - 6$.

b In de uitdrukking $4p - 3 + 2p$: wat is de variabele en wat zijn de drie termen? Bereken daarna de waarde voor $p = -2$.

V3 Negatieve getallen

a Bereken $-7 + 12 - 4$.

b Bereken $6 - (-3)$.

V4 Rekenvolgorde

a Bereken $24 - 3 \times 5$.

b Bereken $(18 + 6) \div 4 + 2^3$.

V5 Breuken optellen en vermenigvuldigen

a Bereken $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$. Schrijf het antwoord als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

b Bereken $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}$. Schrijf het antwoord als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

V6 Breuken aftrekken en delen

a Bereken $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$. Schrijf het antwoord als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

b Bereken $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10}$. Schrijf het antwoord als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

V7 Machten en wortels van getallen

a Bereken $(-3)^2 + 2^3$.

b Bereken $\sqrt{81} - \sqrt{16}$.

V8 Invullen in een gegeven formule

Voor deze oefening worden de huurkosten van materiaal berekend met $K = 4 + 2{,}50 \times h$. Hierin is K het bedrag in euro en h het aantal uren dat het materiaal wordt gehuurd.

a Bereken K voor h = 3. Geef het bedrag in euro met twee decimalen.

b Bereken K voor h = 5. Geef het bedrag in euro met twee decimalen.

V9 Liters en milliliters

Voor deze oefening bevat een kan 1,8 liter sap. Een vol glas bevat 250 milliliter sap.

a Hoeveel milliliter sap bevat de kan?

b Hoeveel glazen kun je helemaal vullen? Bereken ook hoeveel milliliter sap daarna in de kan overblijft.

V10 Kosten en wisselgeld

De prijzen in de tabel zijn voor deze oefening vastgesteld. Geef alle geldbedragen in euro met twee decimalen.

Artikel	Prijs per stuk in euro
Rol papier	2,75
Set stiften	4,60

a Je koopt 3 rollen papier en 1 set stiften. Bereken het totaalbedrag.

b Je betaalt de aankoop uit vraag a met € 20,00. Hoeveel wisselgeld krijg je?

4.1 Haakjes wegwerken en uitdrukkingen herleiden

Leerdoel

Ik kan haakjes met één of twee factoren wegwerken, ook met negatieve factoren.

Theorie

Haakjes wegwerken

De distributieve eigenschap is $a(b + c) = ab + ac$ en $a(b - c) = ab - ac$. De factor vóór de haakjes werkt op elke term. Een min vóór haakjes is de factor -1: $-(b - c) = -b + c$. Bij twee paar haakjes vermenigvuldig je elke term van het eerste paar met elke term van het tweede paar: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Voeg daarna gelijksoortige termen samen.

Voeg alleen termen met hetzelfde letterdeel en dezelfde machten samen: $3x - x = 2x$; x en x^2 houd je apart.

Een invulcontrole kan een fout aantonen; gelijke uitkomsten bij enkele waarden bewijzen geen gelijkheid voor alle waarden. Geldige herschrijfstappen verantwoorden die gelijkheid.

Zie voorbeeld 4.1A, blz. 392.

Onthoud: Een min vóór haakjes verandert het teken van elke term binnen de haakjes.

1 Elk teken telt

a Herleid $3(2x - 5) - 2(x + 4)$. Schrijf eerst beide producten zonder haakjes en voeg daarna gelijksoortige termen samen.

b Een leerling schrijft $3(2x - 5) - 2(x + 4) = 4x - 7$. Controleer beide kanten voor $x = 2$. Wat toont deze controle aan? Leg ook uit wat een controle met gelijke uitkomsten wel en niet zou aantonen.

2 Twee paar haakjes

a Werk $(x + 4)(x - 2)$ uit en herleid. Schrijf eerst de vier producten die ontstaan.

b Herleid $-(a - 3)(a + 2)$. Werk eerst het product van de twee paar haakjes uit en verwerk daarna het minteken ervoor.

3 Zelf haakjes wegwerken

a Herleid $-4(3x - 2) + 5(x + 1)$.

b Herleid $(2x - 3)(x + 4)$.

c Herleid $2x(x - 5) - (x - 2)(x + 3)$.

4 Pakketten met korting

De situatie en bedragen zijn fictief en samengesteld voor deze oefening. Een vereniging bestelt zeven identieke pakketten voor een activiteit met n deelnemers, met n een geheel getal en $n \geq 4$. Een pakket kost $2n + 5$ euro. Op de totale bestelling krijgt de vereniging een korting van $3(n - 4)$ euro.

a Stel een uitdrukking K op voor de totale kosten na de korting en herleid die zonder haakjes. Geef aan hoe je de korting verwerkt.

b De penningmeester gebruikt $P = 11n + 23$ voor de kosten. Controleer deze formule bij zes deelnemers. Beoordeel haar formule en verantwoord waarom jouw correcte formule voor elke toegestane n hetzelfde bedrag oplevert als de bestelling met korting.

Gelijksoortige termen

Leerdoel

Ik kan gelijksoortige termen samenvoegen tot een equivalente uitdrukking.

Theorie

Gelijksoortige termen

Een term bestaat uit een getalfactor met een letterdeel, of uit alleen een getal. Termen zijn gelijksoortig als hun letterdelen gelijk zijn, inclusief de machten. Daarom is $3x + 2x = 5x$, maar $3x + 2x^2$ kun je niet tot één term samenvoegen. Neem het teken van elke term mee. ab en ba zijn hetzelfde letterdeel, want de volgorde van vermenigvuldigen maakt niet uit. Onderscheid optellen en vermenigvuldigen: $x + x = 2x$, terwijl $x \times x = x^2$.

Zie voorbeeld 4.1A, blz. 392.

Onthoud: Bij optellen voeg je coëfficiënten samen; je verandert het letterdeel niet.

5 Termen met hetzelfde letterdeel

a Herleid $5x + 3y - 2x + 4 - y - 9$. Zet eerst de x-termen, de y-termen en de losse getallen bij elkaar.

b Herleid $4p^2 - p + 3p^2 + 6p - 8p^2 + p$. Noteer eerst welke termen p^2 bevatten en welke p bevatten.

6 Letterdelen vergelijken

a Herleid $7a - 2b - 5a + 6b - 3$.

b Herleid $3x^2 - 4x + 6 - 5x^2 + 9x - 1$.

c Herleid $2ab - 3a + 5ba + a - ab$.

7 Kiezen en terugredeneren

a Welke uitdrukking is equivalent aan $3p - 2q + 5p + 7q$? Keuze 1: $8p + 5q$. Keuze 2: $8p + 9q$. Keuze 3: $13pq$. Verantwoord je keuze.

b Bepaal k zodat $7x^2 - 3x + kx^2 + 5x = 2x^2 + 2x$ voor alle x geldt. Licht toe.

c Is $2a + 3b = 5ab$ voor alle a en b? Geef een tegenvoorbeeld en leg uit welke fout het samenvoegen zou bevatten.

8 Overlappende decorstukken

Dit oppervlaktemodel is fictief en samengesteld voor deze oefening. Twee decorstukken hebben oppervlakten $A = 5x^2 + 3xy + 4y^2$ en $B = 2x^2 - xy + 6y^2$. De overlap is $O = x^2 + 2xy + y^2$. Hierin zijn x en y positieve lengtes in dm; A, B en O zijn oppervlakten in dm^2. Voor het materiaal tel je beide stukken op en tel je de overlap eenmaal minder.

a Stel de uitdrukking T voor de benodigde materiaaloppervlakte op en herleid deze. Leg uit wat er met de xy-termen gebeurt.

b Een medewerker vervangt $6x^2 + 9y^2$ door $15x^2y^2$. Leg uit waarom dat onjuist is. Bereken de werkelijk benodigde materiaaloppervlakte bij $x = 2$ en $y = 3$.

Een factor buiten haakjes

Leerdoel

Ik kan een gemeenschappelijke factor buiten haakjes halen.

Theorie

Een factor buiten haakjes

De distributieve eigenschap werkt ook in de terugrichting: $ab + ac = a(b + c)$ en $ab - ac = a(b - c)$. Kies een factor die in elke term voorkomt. Bepaal daarna de binnentermen die bij vermenigvuldiging met de gekozen factor de oorspronkelijke termen geven. Bijvoorbeeld: $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$. Verschillende buitenfactoren kunnen correcte ontbindingen opleveren. Controleer door uit te vermenigvuldigen; daarmee verantwoord je de gelijkheid, ook bij $x = 0$.

Zie voorbeeld 4.1B, blz. 393.

Onthoud: Elke oorspronkelijke term moet terugkomen bij uitvermenigvuldigen.

9 Een factor terugvinden

a Schrijf $12x + 18$ als een product met haakjes. Kies een gemeenschappelijke gehele getalfactor groter dan 1. Controleer je product door uit te vermenigvuldigen.

b Schrijf $8p^2 - 12p$ als een product met haakjes. Kies een gemeenschappelijke factor die p bevat. Controleer je product.

10 Zelf een factor kiezen

a Haal een gemeenschappelijke factor buiten haakjes in $15a - 25b$.

b Haal een gemeenschappelijke factor buiten haakjes in $6x^2 + 9xy - 3x$.

c Haal een gemeenschappelijke factor buiten haakjes in $10uv - 15u^2v$.

11 De buitenfactor ligt vast

a Vul de uitdrukking tussen de haakjes aan: $6x^2 + 18x = 6x(\dots)$.

b Schrijf $-4p(2p - 3)$ zonder haakjes. Schrijf het resultaat daarna als een product waarbij de getalfactor vóór p positief is.

c Je wilt $6a^2 - 9a$ ontbinden. Kies als buitenfactor 3a, 6a of $6a^2$. Welke keuze zorgt dat binnen de haakjes alleen gehele getallen vóór de letterdelen staan en geen letter in de noemer nodig is? Verantwoord.

12 Etiketten op vellen

Deze aantallen zijn fictief en samengesteld voor deze oefening. Een atelier heeft volgens zijn rekenmodel $6n^2 + 15n$ etiketten nodig. Hierbij is n een positief geheel getal. De leverancier biedt vellen met 3n etiketten en vellen met n etiketten. Er blijven in dit model geen etiketten over.

a Hoeveel vellen met 3n etiketten zijn nodig? Schrijf het benodigde aantal etiketten eerst als een product waaruit je het aantal vellen kunt aflezen.

b Vergelijk voor $n = 4$ het benodigde aantal vellen bij beide velgroottes. Geef voor de vellen met n etiketten ook een bijpassende ontbinding.

Gelijkwaardigheid controleren

Leerdoel

Ik kan een algebraïsche herschrijving controleren met invulwaarden en geldige stappen verantwoorden.

Theorie

Gelijkwaardigheid controleren

Twee uitdrukkingen zijn equivalent als ze voor elke toegestane waarde dezelfde uitkomst geven. Vul bij een controle dezelfde waarden in de oorspronkelijke en de nieuwe vorm in. Verschillende uitkomsten leveren een tegenvoorbeeld en weerleggen de gelijkwaardigheid. Gelijke uitkomsten bij één of meer invulwaarden bewijzen geen gelijkheid voor alle waarden. Dat bewijs kun je geven met geldige herschrijfstappen: bijvoorbeeld distributief werken, de volgorde van een som of product wijzigen en gelijksoortige termen samenvoegen.

Zie voorbeeld 4.1A, blz. 392 en voorbeeld 4.1B, blz. 393.

13 Controleren en bewijzen

a Een leerling schrijft $(x - 4)(x + 1) = x^2 - 3x + 4$. Controleer dit voor $x = 2$. Is de herschrijving voor alle x juist? Geef ook de correcte herschrijving met een verantwoording.

b Bij $A = 2(x + 3) - x$ en $B = x + 6$ vindt een leerling gelijke uitkomsten voor $x = 0$ en $x = 5$. De leerling noemt dit een bewijs dat A en B voor alle x gelijk zijn. Beoordeel die redenering en bepaal met een bewijs of de vormen equivalent zijn.

14 Wanneer is een controle genoeg?

a Voor $A = x^2 + x$ en $B = 2x$ zijn de uitkomsten bij $x = 0$ en bij $x = 1$ gelijk. Zijn A en B daarom equivalent? Onderbouw je antwoord met een zelfgekozen invulwaarde.

b Beoordeel of $3(x - 2) - (2x - 5) = x - 1$ voor alle x geldt. Verantwoord elke herschrijfstap en controleer vervolgens $x = -3$.

15 Offertes vergelijken

De situatie en offertes zijn fictief en samengesteld voor deze oefening. Voor n houten houders rekent aanbieder A een totaalbedrag $A = 4(3n + 2) - 2n$ euro. Aanbieder B rekent $B = 2(5n + 4)$ euro. Hierbij is n een positief geheel getal.

a Bereken beide offertes voor drie houders. Wat kun je op grond van deze controle zeggen over hun gelijkheid?

b Bepaal of de offertes voor elk toegestaan aantal houders gelijk zijn. Onderbouw je conclusie zonder een lijst invulwaarden.

c Aanbieder C rekent $C = 13n + 5$ euro. Voor één houder is dat hetzelfde bedrag als bij A. Geldt die gelijkheid voor elk toegestaan aantal? Onderbouw.

16 Fouten opsporen

a Een leerling herleidt $-(3x - 4) + 2(x - 1)$ in twee regels. Regel 1: $-3x - 4 + 2x - 2$. Regel 2: $-x - 6$. Wijs de eerste fout aan, leg die uit en geef de correcte herleiding.

b Een andere leerling schrijft $2a + 3a^2 = 5a^3$. Leg de fout uit, geef de correct herleide som en controleer de bewering met een zelfgekozen waarde.

17 Zelftest 1

a Herleid $(2x - 1)(x - 3) - x(x + 2)$.

b Schrijf $12a^2b - 18ab^2$ als een product door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen.

18 Zelftest 2

a Herleid $5u^2 - 3uv + 2v^2 - 2u^2 + 7uv - 6v^2$.

b Een leerling beweert dat $-2(x - 5) + 3x = x + 5$ voor elk getal x geldt. Beoordeel de bewering met een invulcontrole en een geldige algebraïsche herschrijving.

4.2 Breuken met letters

Leerdoel

Ik kan letterbreuken vereenvoudigen door gemeenschappelijke factoren te herkennen.

Theorie

Factoren wegstrepen

De hele teller en noemer Een letterbreuk is een deling. De noemer mag niet nul zijn. Noteer die voorwaarde vóór je herleidt en behoud haar in het antwoord. Je maakt een gelijkwaardige breuk door de hele teller en de hele noemer door dezelfde niet-nulle factor te delen. Bij een product kun je gemeenschappelijke factoren wegstrepen. Bij een som mag je losse termen niet wegstrepen.

Maak de factoren zichtbaar Schrijf zo nodig eerst een som als product met de distributieve eigenschap: $ax + bx = x(a + b)$. Bijvoorbeeld $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$. Let ook op tegengestelde vormen: $5 - z = -(z - 5)$. Na het wegstrepen kan een verboden waarde uit de formule verdwijnen; de oorspronkelijke noemer blijft beslissend. Zie voorbeeld 4.2A, Voorbeelden blz. 3.

Onthoud: Streep factoren weg; behoud de voorwaarden van de oorspronkelijke breuk.

1 Eerst de factoren

a Herleid $\frac{6x^2 + 18x}{9x}$. Schrijf eerst de teller als een product. Benoem vervolgens de factoren die je kunt wegstrepen.

b Welke waarde van x is in de oorspronkelijke breuk niet toegestaan? Noteer de voorwaarde naast het antwoord van a. Controleer dat antwoord door $x = 3$ in beide vormen in te vullen.

2 Herkennen en herleiden

a Herleid $\frac{8y^2 - 12y}{4y}$ en vermeld de voorwaarde.

b Herleid $\frac{5 - z}{z - 5}$ en vermeld de voorwaarde.

c Een leerling schrijft $\frac{a + 6}{a + 3} = 2$. Weerleg dit met $a = 1$ en leg uit welke rekenregel verkeerd wordt gebruikt.

3 Twee formules vergelijken

De formules zijn $f(x) = \frac{2x^2 - 10x}{x - 5}$ en $g(x) = 2x$.

a Herleid f(x). Voor welke waarden van x geven f en g dezelfde uitkomst?

b Een leerling zegt: “Na het herleiden geeft ook f(5) de uitkomst 10.” Beoordeel dit en geef de waarden of beperkingen van f(5) en g(5).

4 Materiaal per set

Een atelier maakt q series van elk drie sets. De totale materiaaluitgave is $T(q) = 12q^2 + 60q$ euro. De uitgave per set is $C(q) = \frac{12q^2 + 60q}{3q}$ euro. In dit model is q een positief geheel getal. De formule en bedragen zijn samengesteld voor de oefening.

a Herleid C(q) en leg uit welke factor je wegstreept.

b Welke q sluit de oorspronkelijke breuk algebraïsch uit? Welke q zijn in de context toegestaan? Leg uit waarom je C(0) niet mag bepalen met de herleide vorm.

c Bereken de uitgave per set bij vijf series. Met hoeveel euro stijgt die uitgave per set wanneer er één serie bijkomt? Onderbouw je antwoord met de formule.

Gelijknamige breuken

Leerdoel

Ik kan letterbreuken optellen of aftrekken met een gemeenschappelijke noemer.

Theorie

Gelijknamige breuken

Eerst dezelfde noemer Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst gelijknamig. Vermenigvuldig teller én noemer met dezelfde factor. Kies een noemer die alle oorspronkelijke noemers als factor bevat. Zo is 6x geschikt voor de noemers 2x en 6x; x(x + 3) is geschikt voor x en x + 3. De oorspronkelijke noemers moeten niet nul zijn.

Dan de tellers Bij gelijke noemers tel je alleen de tellers op of trek je alleen de tellers af. De noemer blijft staan: $\frac{A}{N} - \frac{B}{N} = \frac{A-B}{N}$, met $N \neq 0$. Zet bij aftrekken een teller met meerdere termen tussen haakjes. Schrijf een los getal zo nodig ook als breuk met dezelfde noemer, bijvoorbeeld $1 = \frac{N}{N}$ voor $N \neq 0$. Herleid pas daarna en behoud alle oorspronkelijke voorwaarden. Deel a van voorbeeld 4.2B, blz. 395 laat het aftrekken zien; deel b gebruikt de uitkomst bij een deling.

Onthoud: Bij aftrekken verandert een min vóór haakjes het teken van elke term binnen de haakjes.

5 Een noemer kiezen

a Tel $\frac{3}{2x}$ en $\frac{5}{6x}$ op. Gebruik 6x als gemeenschappelijke noemer. Schrijf eerst de twee gelijkwaardige breuken en herleid de uitkomst.

b Herleid $\frac{4}{x-2} - \frac{1}{x}$. Gebruik x(x − 2) als gemeenschappelijke noemer. Zet de tweede teller tussen haakjes voordat je aftrekt.

6 Som en verschil

a Schrijf $\frac{5}{x} + \frac{2}{x+3}$ als één zo eenvoudig mogelijke breuk en vermeld de voorwaarden.

b Schrijf $\frac{2x-1}{x} - \frac{x+3}{2x}$ als één zo eenvoudig mogelijke breuk en vermeld de voorwaarde.

7 Ook het losse getal

a Herleid $1 - \frac{2u+1}{u+1}$ tot één breuk en vermeld de voorwaarde.

b Herleid $\frac{2}{v-1} + \frac{v+1}{v-1} - 1$. Leg vervolgens uit waarom de uitkomst geen vaste waarde heeft.

8 Dezelfde voorraad verdelen

Een opslag verdeelt 84 kg kralen gelijkmatig over n dozen. Bij een tweede verdeling wordt dezelfde voorraad over n + 4 dozen verdeeld. n is een positief geheel getal. De hoeveelheden zijn samengesteld voor de oefening.

a Stel één breuk op voor het aantal kilogram dat een doos bij de eerste verdeling méér bevat dan bij de tweede verdeling. Herleid die breuk.

b Kan een doos bij de eerste verdeling minder bevatten dan bij de tweede verdeling? Onderbouw je antwoord met de breuk uit a.

c Bereken het verschil bij n = 8. Geef de eenheid.

Vermenigvuldigen en omkeren

Leerdoel

Ik kan letterbreuken vermenigvuldigen en delen.

Theorie

Vermenigvuldigen en omkeren

Een product Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je de tellers met elkaar en de noemers met elkaar: $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$. Hierbij zijn B en D niet nul. Gemeenschappelijke factoren kun je vóór of na het vermenigvuldigen wegstrepen. Schrijf sommen zo nodig eerst als producten.

Een deling Delen door een breuk is vermenigvuldigen met haar omgekeerde: $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$. B en D mogen niet nul zijn en de deler $\frac{C}{D}$ moet ook niet nul zijn; daarom geldt bovendien $C \neq 0$. Bewaar alle voorwaarden, ook als factoren verdwijnen. Zie deel b van voorbeeld 4.2B, blz. 395. In een context kies je de bewerking op grond van de grootheden: hoeveelheid ÷ hoeveelheid per stuk geeft een aantal; tijd × hoeveelheid per uur geeft een hoeveelheid.

Onthoud: Controleer bij delen ook of de volledige breukdeler nul is.

9 Product en deling

a Herleid $\frac{3a}{8} \times \frac{4}{9a}$. Schrijf eerst één breuk en benoem welke factoren je wegstreept.

b Herleid $\frac{5b}{6} \div \frac{10b}{3}$. Schrijf de deling eerst als een vermenigvuldiging. Noteer ook wanneer de deler nul is.

c Herleid $\frac{p+2}{3p} \div \frac{p+2}{6}$. Controleer vóór het wegstrepen zowel de oorspronkelijke noemer als de nulwaarde van de deler.

10 Zelf een aanpak kiezen

a Herleid $\frac{7t}{12} \times \frac{18}{t^2}$ en vermeld de voorwaarde.

b Herleid $\frac{x^2 - 4x}{5x} \div \frac{3x - 12}{10}$ en vermeld alle voorwaarden.

11 De bewerking maakt verschil

a Herleid $\frac{2}{m + 1} \times \frac{m^2 + m}{6}$. Mag m = 0? Licht je antwoord toe.

b Herleid $\frac{2}{m + 1} \div \frac{m^2 + m}{6}$. Mag m = 0 nu ook? Licht het verschil met a toe.

12 Lak voor platen

Een oefenmodel voor een coatingwerkplaats gebruikt een positieve gehele instelling q. De lakvoorraad is $l(q) = \frac{18q}{q + 2}$ liter en één plaat verbruikt $V(q) = \frac{3}{q + 2}$ liter. Voor proefplaten wordt het deel $\frac{q + 2}{6q}$ van de voorraad gebruikt. De formules en hoeveelheden zijn samengesteld voor de oefening.

a Stel een formule op voor het aantal platen dat je vóór het lakken van proefplaten met de volledige voorraad kunt lakken. Herleid de formule.

b Bereken met de formules hoeveel liter lak voor de proefplaten wordt gebruikt. Leg uit waarom die hoeveelheid bij elke toegestane instelling gelijk is.

c Neem q = 4. Hoeveel platen kun je lakken met de lak die na de proefplaten overblijft?

13 Een pompmodel

Bij een positieve instelling a is de looptijd $t(a) = \frac{a + 3}{2a}$ uur en het debiet $r(a) = \frac{4a}{a + 3}$ m^3 per uur. Het debiet blijft tijdens het pompen gelijk. Deze formules zijn samengesteld voor de oefening.

a Bereken met de formules het volume dat in tijd t(a) wordt gepompt. Is dit volume afhankelijk van a?

b Stel en herleid een formule voor de tijd die nodig is voor 6 m^3. Laat met algebra zien of die tijd gelijk is aan 3t(a).

14 Een breuk en een verpakking

a Herleid $\frac{15k^2 + 10k}{5k}$ en vermeld de voorwaarde.

b Herleid $\frac{4r}{r - 3} \div \frac{2r^2}{r - 3}$ en vermeld alle voorwaarden.

c Een oefenverpakking bevat $\frac{10s}{s + 1}$ kg poeder. Eén portie bevat $\frac{2}{s + 1}$ kg; s is een positief geheel getal. Deze hoeveelheden zijn samengesteld voor de oefening. Stel een herleide formule op voor het aantal volledige porties in de verpakking.

Het toegestane domein

Leerdoel

Ik kan aangeven welke waarden niet toegestaan zijn door een nul in een noemer of deler.

Theorie

Het toegestane domein

De oorspronkelijke vorm beslist Bepaal het domein, de verzameling toegestane waarden, vanuit de oorspronkelijke vorm. Los voor iedere oorspronkelijke noemer de vergelijking “noemer = 0” op en sluit die waarden uit. Staat de noemer als product, dan is het product nul wanneer minstens één factor nul is. Een nul in een teller is gewoon toegestaan, zolang de breuk gedefinieerd is.

Bij een breukdeler Bij delen moet ook de deler niet nul zijn. Controleer eerst of de breukdeler bestaat en sluit vervolgens de waarden uit waarbij zijn teller nul is. Een nul in de teller van een deler geeft immers een deling door nul. Noteer alle uitsluitingen samen; een waarde hoeft maar eenmaal in de lijst. Wegstrepen verandert die lijst niet. In een context kunnen extra grenzen gelden, zoals een positief aantal of een geheel getal. Voorbeeld 4.2A, blz. 394 en voorbeeld 4.2B, blz. 395 laten zien hoe een uitsluiting behouden blijft bij herleiden en delen.

15 **Waar ontstaat nul?**

a Welke t is niet toegestaan in $\frac{7}{2t-6}$? Stel de noemer gelijk aan nul, los die vergelijking op en noteer de toegestane waarden.

b Bepaal alle niet-toegestane waarden in $\frac{t+1}{t-4} \div \frac{t-2}{t+5}$. Onderzoek afzonderlijk de twee oorspronkelijke noemers en de nulwaarde van de breukdeler.

16 Voorwaarden blijven gelden

a Bepaal alle niet-toegestane waarden van $\frac{x-1}{x^2-x}$. Leg uit waarom $x = 1$ verboden blijft als je de breuk herleidt.

b Bepaal alle niet-toegestane waarden van $\frac{y-6}{y+2} \div \frac{y+1}{3y}$. Geef bij elke waarde de reden.

c Bepaal alle niet-toegestane waarden van $\frac{a}{a+4} \times \frac{a-2}{a}$. Is $a = 2$ toegestaan? Verklaar ook waarom een eventueel weggestreepte factor geen voorwaarde laat vervallen.

17 Drie uitwerkingen beoordelen

Hieronder staan drie leerlinguitwerkingen. Beoordeel telkens de fout en geef een correct resultaat met voorwaarden.

a Een leerling schrijft $\frac{x+9}{x} = 9$, omdat de x volgens hem wegvalt. Leg de fout uit en weerleg het resultaat met $x = 3$.

b Een leerling schrijft $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{-2}$. Leg de fout uit en bereken de juiste breuk.

c Een leerling herleidt $\frac{x-3}{x+1} \div \frac{x-3}{2}$ tot $\frac{2}{x+1}$ en noemt alleen $x \neq -1$. Beoordeel zowel de breuk als de voorwaarde.

18 Verschil en domein

a Schrijf $\frac{7}{u} - \frac{2}{u+5}$ als één zo eenvoudig mogelijke breuk en vermeld de voorwaarden.

b Welke waarden van z zijn niet toegestaan in $\frac{z+4}{z-6} \div \frac{z-1}{2z+8}$? Geef bij elke uitsluiting de reden.

c Een reservoir van 50 liter wordt in het eerste plan in n dagen gebruikt en in het tweede plan in n + 2 dagen. Het dagelijkse gebruik is binnen elk plan gelijk; n is een positief geheel getal. Deze gegevens zijn samengesteld voor de oefening. Schrijf het verschil “eerste dagverbruik min tweede dagverbruik” als één breuk en bepaal of dit verschil positief, nul of negatief is.

4.3 Machten en wortels

Leerdoel

Ik kan producten, quotiënten en machten van machten herschrijven met de machtsregels.

Theorie

Machten samenvoegen

Eerst de grondtallen Een positieve gehele exponent telt gelijke factoren: $a^3 = a \times a \times a$. Voor $a \neq 0$ en gehele exponenten m en n gelden $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ en $(a^m)^n = a^{mn}$. Hier begin je met positieve exponenten. Bij uitsluitend positieve machten mag a ook 0 zijn, zolang je niet door 0 deelt. $a^0 = 1$ geldt voor $a \neq 0$.

Een hele basis Bij $(ab)^n$ krijgen beide factoren de exponent: $(ab)^n = a^n b^n$. Ook $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$. Deze regels gelden voor niet-nulle reële a en b en gehele n. Bij positieve n mag a 0 zijn; een oorspronkelijke noemer mag nooit 0 zijn. Haakjes bepalen de basis: $(-2x)^2 = 4x^2$. Alleen bij gelijke grondtallen kun je de exponenten van een product optellen. Bij een som tel je gelijke termen op: $x^2 + x^2 = 2x^2$.

Herleiden en invullen Herleid eerst de lettervorm: verwerk de getallen apart van de machten. Bewaar alle voorwaarden van de oorspronkelijke uitdrukking, ook als een noemer later verdwijnt. Bij een formule kun je daarna een toegestane waarde invullen; bereken machten vóór producten en sommen en vermeld de eenheid. Controleer dezelfde waarde in de oorspronkelijke formule. Een invulcontrole kan een rekenfout zichtbaar maken, maar bewijst geen algemene gelijkheid. In voorbeeld 4.3A, blz. 397 zie je de aanpak.

Onthoud: Product: exponenten optellen; quotiënt: aftrekken; macht van een macht: vermenigvuldigen.

1 Oppervlakte van een vlak

Een rechthoek heeft zijden $2x^2$ dm en $3x^3$ dm, met $x > 0$. De oppervlakte A in dm^2 is $A = (2x^2)(3x^3)$.

a Herleid de formule voor A. Vermenigvuldig eerst de getallen en tel daarna de exponenten van hetzelfde grondtal op.

b Herleid $\frac{(x^2)^3}{x^3}$ tot één macht van x. Werk eerst de macht van een macht uit.

c Bereken A bij $x = 2$. Vul de waarde in de herleide formule in en vermeld de eenheid.

1 Oppervlakte van een vlak (vervolg)

d Controleer de uitkomst van c met de twee oorspronkelijke zijden. Leg uit waarom deze controle bruikbaar is.

2 Een enkele macht

a Herleid $\frac{y^4 \times y^7}{y^2}$, met $y \neq 0$, tot één macht van y.

b Herleid $\frac{(3y^2)^3}{9y^5}$, met $y \neq 0$.

c Iemand schrijft $y^3 + y^3 = y^6$. Geef de juiste herleiding voor alle reële y en verklaar de fout.

3 Tekens en haakjes

a Werk $(-2z^3)^2$ uit, voor reële z.

b Werk $(-2z)^3$ uit, voor reële z, en verklaar het teken van de coëfficiënt.

4 Kaartjes per bestelling

Voor deze oefening is een bestelmodel samengesteld: een bestelling met instelling k bevat $N = \frac{(3k^2)^2}{k}$ kaartjes. k is een positief geheel getal.

a Herleid het model en bepaal N bij $k = 2$.

b Hoeveel keer zo groot is de bestelling bij $k = 4$ als bij $k = 2$? Verklaar dit met machten.

Negatieve exponenten

Leerdoel

Ik kan negatieve gehele exponenten herschrijven als breuken met positieve gehele exponenten.

Theorie

Negatieve exponenten

De omgekeerde macht Voor een reëel grondtal $a \neq 0$ en een positief geheel getal n geldt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Daarom is $a^n \times a^{-n} = 1$. Zo is $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Een negatieve exponent maakt een positieve basis niet negatief. Het grondtal 0 mag bij een negatieve exponent niet worden gebruikt.

Haakjes en plaats De exponent hoort bij de geschreven basis. Zo is $7x^{-2} = \frac{7}{x^2}$, maar $(7x)^{-2} = \frac{1}{49x^2}$; in beide gevallen $x \neq 0$. Bij $(-2)^{-2}$ is de basis -2 en de uitkomst $\frac{1}{4}$. Bij -2^{-2} staat het minteken buiten de macht en is de uitkomst $-\frac{1}{4}$. Lees dus eerst de haakjes.

Combineren De machtsregels blijven gelden voor niet-nulle reële grondtallen en gehele exponenten. Je kunt eerst combineren en daarna een negatieve exponent herschrijven, of eerst alle negatieve machten als breuken schrijven. Bij delen controleer je dat de oorspronkelijke deler niet 0 is. Tel je twee gelijke termen op, dan tel je hun coëfficiënten op. Voorbeeld 4.3B, blz. 399 begint met een negatieve exponent in een formule.

Onthoud: Een negatieve gehele exponent betekent de omgekeerde positieve macht; het grondtal is niet 0.

5 Een exponent onder nul

a Schrijf 5^{-2} als een breuk met een positieve exponent en bereken de waarde.

b Schrijf $3x^{-4}$, met $x \neq 0$, zonder negatieve exponent. Let op welke factor de exponent heeft.

c Bereken $\frac{1}{2^{-3}}$. Herschrijf eerst de negatieve macht.

6 Positieve exponenten

a Schrijf $\frac{t^{-3}}{t^2}$, met $t \neq 0$, zonder negatieve exponent.

b Schrijf $(2t)^{-2}$, met $t \neq 0$, zonder negatieve exponent.

c Schrijf $t^{-2} + t^{-2}$, met $t \neq 0$, als één breuk met positieve exponenten.

7 Mintekens lezen

a Bereken $(-3)^{-3}$ exact.

b Bereken -3^{-2} exact. Verklaar welk teken bij het grondtal hoort.

8 Verf in een oefenmodel

Voor deze oefening is het model $Q = 72d^{-2}$ samengesteld. Q is een hoeveelheid verf in liter en $d > 0$ is een dimensieloze instelling.

a Schrijf de formule zonder negatieve exponent.

b Bereken Q bij $d = 3$.

c Bepaal Q bij $d = 6$. Geef ook aan welk deel dit is van de hoeveelheid bij $d = 3$ en verklaar dat verschil.

9 Exponenten en breuken

a Schrijf $(3u)^{-2}$, met $u \neq 0$, zonder negatieve exponent.

b Schrijf $\frac{u^{-4} \times u^{2}}{2}$, met $u \neq 0$, zonder negatieve exponent.

c Bereken -2^{-4} exact.

Wortels herleiden

Leerdoel

Ik kan eenvoudige worteluitdrukkingen herschrijven en de voorwaarden vermelden.

Theorie

Wortels herleiden

Een niet-negatieve wortel $\sqrt{a}$ is het niet-negatieve getal waarvan het kwadraat a is; in de reële getallen bestaat deze wortel als $a \geq 0$. Daarom is $\sqrt{x^2} = |x|$ voor alle reële x. $|x|$ betekent x als $x \geq 0$ en $-x$ als $x < 0$. Bijvoorbeeld $\sqrt{(-7)^2} = 7$. Met de voorwaarde $x \geq 0$ mag je $\sqrt{x^2}$ als x schrijven.

Product en quotiënt Voor $a \geq 0$ en $b \geq 0$ geldt $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Voor $a \geq 0$ en $b > 0$ geldt $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. De strikte voorwaarde $b > 0$ houdt de noemer niet 0. Voor reële k en $a \geq 0$ is $\sqrt{k^2 a} = |k|\sqrt{a}$; als $k \geq 0$ wordt dat $k\sqrt{a}$. Deze vormen en hun voorwaarden worden gebruikt in voorbeeld 4.3B, blz. 399.

Kwadraatfactoren zoeken Zoek bij een getal een zo groot mogelijke kwadraatfactor: $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$. Onder de wortel blijft dan geen kwadraatfactor groter dan 1 staan. Je kunt gelijke worteldelen optellen: $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Bij vermenigvuldigen mag je de wortelinhouden samenvoegen als beide niet-negatief zijn. Voor een som bestaat geen regel $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$; bijvoorbeeld $\sqrt{9+16} = 5$ en $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Onthoud: Een wortel is niet-negatief: $\sqrt{x^2} = |x|$.

10 Kwadraatfactoren

a Herleid $\sqrt{72}$. Gebruik $72 = 36 \times 2$ en haal de kwadraatfactor uit de wortel.

b Herleid $\sqrt{9x^2}$ voor alle reële x. Gebruik $\sqrt{x^2} = |x|$.

c Herleid $\sqrt{16x} \times \sqrt{x}$, met $x \geq 0$. Voeg de wortels samen voordat je vereenvoudigt.

11 Wortels in eenvoudige vorm

a Herleid $\sqrt{180}$ zodat er geen kwadraatfactor groter dan 1 onder de wortel blijft staan.

b Herleid $\sqrt{25r^2}$, met $r < 0$, zonder absolute-waardetekens.

c Herleid $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ exact.

12 Dezelfde wortels

a Herleid $\sqrt{50} + \sqrt{8}$ exact.

b Herleid $\sqrt{50} \times \sqrt{8}$ exact.

13 Een vierkant paneel

De gegevens zijn samengesteld voor deze oefening. Een vierkant paneel heeft oppervlakte $A = 288$ cm^2. De zijde s in cm voldoet aan $s = \sqrt{A}$. De diagonale versteviging heeft lengte $d = \sqrt{2s^2}$ cm; $s \geq 0$.

a Geef s exact, zonder kwadraatfactor groter dan 1 onder de wortel.

b Bereken d exact. Noem ook de voorwaarde die het schrijven $d = s\sqrt{2}$ rechtvaardigt.

14 Een rand om een vloer

De gegevens zijn samengesteld voor deze oefening. Een vierkante vloer heeft oppervlakte 98 m^2. De zijde is de positieve wortel van de oppervlakte. Voor de omtrek P geldt $P = 4s$, met s de zijde in meter. Bij b mag je een rekenmachine gebruiken.

a Geef de zijde s in exacte, vereenvoudigde vorm.

b Geef P exact en daarna afgerond op één decimaal.

15 Wortels herleiden

a Herleid $\sqrt{245}$ exact, zonder kwadraatfactor groter dan 1 onder de wortel.

b Herleid $\sqrt{36z^2}$ voor alle reële z.

c Herleid $\frac{\sqrt{20m}}{\sqrt{5m}}$ voor m > 0. Licht toe waarom m = 0 niet mag.

Formules beoordelen

Leerdoel

Ik kan formules met machten of wortels gebruiken en de uitkomst op plausibiliteit controleren.

Theorie

Formules beoordelen

Invullen met betekenis Bepaal wat de letters voorstellen en welke waarden zijn toegestaan. Herschrijf een formule waar dat helpt, met behoud van de oorspronkelijke voorwaarden. Vul de waarde met haakjes in, vooral bij een decimaal getal of een negatieve waarde. Bereken eerst een macht of de hele wortelinhoud en daarna de overige bewerkingen. Een rekenmachine mag bij een contextvraag alleen wanneer dat erbij staat. Algebraïsch herleiden doe je exact.

Een bruikbare controle Vermeld de eenheid en rond pas het eindantwoord af. Controleer een herleide formule door dezelfde waarde in de oorspronkelijke formule te zetten. Vraag ook of teken en grootte bij de betekenis passen. Een oppervlakte of lengte kan in deze modellen niet negatief zijn. Een grotere invoer hoeft geen evenredig grotere uitkomst te geven: bij $F = ct^n$, $t > 0$, maakt verdubbeling van t de uitkomst een factor 2^n zo groot. Bij $R = \sqrt{ct}$, $c > 0$ en $t > 0$, maakt een vier keer zo grote t de uitkomst twee keer zo groot.

Model en werkelijkheid Een plausibiliteitscontrole zegt of je berekening bij het gegeven model en de betekenis past. Bij een voor een oefening samengesteld model is daarmee geen werkelijk gemeten verband aangetoond. Eén invulcontrole is evenmin een algemeen bewijs van een herleiding. In voorbeeld 4.3A, blz. 397 en voorbeeld 4.3B, blz. 399 worden voorwaarden, eenheden en controle expliciet gemaakt.

16 Drie instellingen

Voor deze oefening zijn twee modellen samengesteld. $P = 2t^3 + 6$ is een aantal punten en $R = \sqrt{25t}$ is een lengte in cm. $t > 0$ is een dimensieloze instelling. Een rekenmachine is hier niet nodig.

a Bereken P bij $t = 2$. Bereken eerst de macht en daarna het product en de som.

b Bereken R bij $t = 4$. Bereken eerst de hele wortelinhoud.

c Een leerling verwacht dat R bij $t = 4$ vier keer zo groot is als bij $t = 1$. Controleer die verwachting door beide lengtes te berekenen.

17 Twee rekenmodellen

De gegevens en modellen zijn samengesteld voor deze oefening. Een buffer heeft volume V = $0{,}8h^3$ liter, met h > 0 de hoogte in dm. Voor een ronde afdekking geldt $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, met S > 0 de oppervlakte in cm^2 en r de straal in cm. Je mag een rekenmachine gebruiken.

a Bereken V bij h = 2,5.

b Bereken r bij S = 50. Rond af op twee decimalen.

c Een leerling verwacht dat een verdubbeling van h het volume verdubbelt. Beoordeel dat met de formule en leg uit welk effect wel volgt.

18 Een ontwerpinstelling

Voor deze oefening is een oppervlaktemodel samengesteld: $A = \frac{(4p^2)^2}{8p}$, met p > 0 een dimensieloze ontwerpinstelling en A de oppervlakte in cm^2. Bij b mag je een rekenmachine gebruiken.

a Herleid de formule tot een getal maal één macht van p.

b Bereken A bij p = 1,5 en controleer de uitkomst met de oorspronkelijke formule.

c Een ontwerper verdubbelt p en verwacht dat A ook verdubbelt. Beoordeel die verwachting vanuit het model.

19 Vier uitwerkingen bekeken

Bij vier berekeningen staat hieronder een uitspraak. Beoordeel elke uitspraak en verbeter wat nodig is.

a Voor alle reële p zou $p^2 \times p^3 = p^6$ gelden. Geef een correcte algemene herleiding en verklaar de fout.

b Er staat $2^{-3} = -8$. Geef de correcte waarde en verklaar de fout.

c Er staat $\sqrt{w^2} = w$ voor alle reële w. Geef de correcte algemene vorm en één waarde waarvoor de uitspraak fout is.

d Bij $A = 3r^2$ cm^2 en r = 4 staat $A = 3 \times 4 = 12$ cm^2. Verbeter de berekening en geef een controle.

20 Een overkapping ontwerpen

Voor deze oefening is een model samengesteld voor de oppervlakte B van een overkapping: $B = \frac{(2v^3)^2}{4v}$. Hier is $v > 0$ een dimensieloze instelling en B de oppervlakte in m^2. Bij c en d mag je een rekenmachine gebruiken.

a Herleid de formule voor B.

b Herleid $\frac{(v^2)^3 \times v^4}{v^2}$ tot één macht van v.

c Bereken B bij $v = 1{,}5$. Rond af op twee decimalen en vermeld de eenheid.

d Noor voorspelt dat B bij $v = 3$ twee keer zo groot is als bij $v = 1{,}5$. Beoordeel haar voorspelling en verklaar het werkelijke effect.

4.4 Variabelen vrijmaken

Leerdoel

Ik kan een variabele vrijmaken met lineaire bewerkingen, ook als dezelfde letter meer dan één keer voorkomt, en een lijn schrijven als $y = ax + b$.

Theorie

Eén letter alleen

Dezelfde relatie anders schrijven Een variabele vrijmaken betekent: de gekozen letter staat alleen aan één kant, en de andere kant bevat die letter niet meer. Je verandert de relatie niet als je aan beide kanten hetzelfde optelt of aftrekt, of beide kanten met hetzelfde niet-nulle getal vermenigvuldigt of erdoor deelt. Werk eerst haakjes uit als dat helpt; verzamel vervolgens de termen met de gezochte letter. In $5u + v = 2u + 18$ trek je $2u$ en daarna v af: $3u = 18 - v$, dus $u = \frac{18 - v}{3}$.

Een lijn in een herkenbare vorm Bij $px + qy = r$ trek je px af: $qy = r - px$. Alleen als $q \neq 0$ mag je delen door q. Dan is $y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$, dus de richtingscoëfficiënt is $a = -\frac{p}{q}$ en het startgetal is $b = \frac{r}{q}$. Als $q = 0$, staat y niet meer in de vergelijking en kun je hiermee geen unieke y vrijmaken.

Een bruikbare waarde Een algebraïsche uitkomst moet ook aan de context voldoen. Controleer bijvoorbeeld of een lengte positief is, een aantal geheel is en een afmeting minstens de opgegeven grens heeft. Bereken bij gegeven voorstellen eerst de uitkomst en toets daarna elke voorwaarde. Voorbeeld 4.4A, blz. 401 laat het vrijmaken en een terugsubstitutie zien.

Onthoud: Deel alleen door een uitdrukking waarvan je hebt vastgesteld dat zij niet nul is.

1 Een opslagwand

Een opslagwand heeft breedte b meter en hoogte h meter. Voor een samengesteld ontwerp geldt $5b + 2h = 34$. De breedte moet minstens 2 meter zijn en de hoogte minstens 3 meter.

a Maak h vrij. Trek eerst $5b$ van beide kanten af en deel daarna beide kanten door 2.

b Welke getallen zijn a en c als je de formule schrijft als $h = ab + c$?

c Bereken de hoogte bij $b = 3$ en bij $b = 6$. Kies het ontwerp dat aan beide gegeven afmetingsvoorwaarden voldoet.

2 Een letter komt terug

a Maak m vrij in $4m + 7n = 9m + 21$.

b Maak y vrij in $px + qy = r$. Vermeld onder welke voorwaarde je de formule als $y = ax + b$ kunt schrijven, en geef a en b.

3 De vorm van een lijn

a Schrijf $8x - 3y = 12$ als $y = ax + b$ en geef a en b.

b In $px + qy = r$ zijn $p = 4$, $q = 0$ en $r = 20$. Welke x is mogelijk? Kun je uit deze vergelijking één y berekenen?

4 Een rek van stroken

Voor een rek worden zes stroken met lengte l centimeter en vier stroken met lengte b centimeter gebruikt. Er is precies 120 centimeter strookmateriaal. Voor dit oefenontwerp moet l minstens 12 centimeter en b minstens 8 centimeter zijn. Daarom geldt $6l + 4b = 120$.

a Maak b vrij en schrijf de formule als $b = al + c$.

b Er zijn voorstellen met $l = 10$, $l = 14$ en $l = 16$. Bereken telkens b en bepaal welk voorstel aan alle voorwaarden voldoet.

5 Pakketten voor verlichting

Voor een samengesteld oefenontwerp leveren s grote pakketten elk 24 wattuur en n kleine pakketten elk 8 wattuur. De totale energie E in wattuur is $E = 24s + 8n$. De aantallen s en n moeten niet-negatieve gehele getallen zijn.

a Maak n vrij in de formule.

b Voor $E = 200$ wordt $s = 8$ voorgesteld en ook $s = 9$. Bepaal welk voorstel precies de vereiste energie kan leveren.

6 Een bedrukt paneel

Voor een samengesteld paneelontwerp geldt $8w + 3h = 96$. De breedte w en de hoogte h zijn in decimeter. Het paneel moet minstens 4 decimeter breed en minstens 6 decimeter hoog zijn.

a Maak h vrij en schrijf de formule als $h = aw + b$.

b Beoordeel de voorstellen $w = 3$ en $w = 9$. Bereken de bijbehorende h en kies het bruikbare voorstel.

Breuk, kwadraat en wortel

Leerdoel

Ik kan een variabele vrijmaken in de behandelde formules met een breuk, een eenvoudig kwadraat of een vierkantswortel.

Theorie

Breuk, kwadraat en wortel

De letter in een noemer Noteer eerst dat elke oorspronkelijke noemer niet nul mag zijn. Vermenigvuldig daarna beide kanten met de hele noemer. Bij $y = \frac{a}{x+b}$, met $a \neq 0$, krijg je $y(x + b) = a$. Nu is $y \neq 0$, dus $x = \frac{a}{y} - b$. Als de gezochte letter daarna aan beide kanten voorkomt, werk je haakjes uit en verzamel je die letter zoals hiervoor. Voorbeeld 4.4B, blz. 402 gebruikt deze aanpak in een vultijdformule.

Een kwadraat van een maat Maak het kwadraat eerst vrij. Bij $A = 3d^2 + 8$, met $d \geq 0$, krijg je $d^2 = \frac{A-8}{3}$. Omdat de afstand d niet negatief is, volgt $d = \sqrt{\frac{A-8}{3}}$, met $A \geq 8$. Eist de context $d > 0$, dan moet ook $A > 8$ zijn. Een negatieve voorgestelde maat kan hetzelfde kwadraat hebben, maar past niet bij een positieve lengte. We gebruiken hier alleen zulke eenvoudige kwadraten van niet-negatieve of positieve grootheden.

Een wortel omkeren Zet eerst de wortel alleen. Bij $B = 2\sqrt{z+5} - 6$ is oorspronkelijk $z \geq -5$. Optellen en delen geeft $\sqrt{z+5} = \frac{B+6}{2}$. Een vierkantswortel is niet negatief, dus $B \geq -6$. Kwadrateren en 5 aftrekken geeft $z = (\frac{B+6}{2})^2 - 5$, met $B \geq -6$. Bewaar die tekenvoorwaarde: kwadrateren kan anders een extra uitkomst opleveren. Bijvoorbeeld: $\sqrt{(-4)^2} = 4$ en niet -4.

Onthoud: Een noemer mag niet nul zijn; een reële vierkantswortel heeft een niet-negatieve inhoud én uitkomst.

7 De omgekeerde bewerking

a Maak x vrij in $y = \frac{18}{x+4}$. Vermenigvuldig eerst met $x + 4$. Vermeld ook welke x en y niet zijn toegestaan.

b In $K = 5a^2 + 10$ is a een niet-negatieve lengte. Maak a vrij: werk eerst naar a^2 toe. Welke K zijn toegestaan?

7 De omgekeerde bewerking (vervolg)

c Maak z vrij in $W = 2\sqrt{z - 3} + 7$. Trek eerst 7 af en deel door 2 voordat je kwadrateert. Geef de voorwaarden voor z en W.

8 Formules omkeren

a Maak p vrij in $V = \frac{48}{p - 1}$. Vermeld de voorwaarden voor de oorspronkelijke en de nieuwe formule.

b In $A = 2d^2 + 6$ is d een niet-negatieve afstand. Maak d vrij en geef de toegestane A.

c Maak t vrij in $R = 4\sqrt{t + 2} - 1$. Geef de voorwaarden voor t en R.

9 Boven en onder de breukstreep

a Maak x vrij in $P = \frac{3x + 5}{x - 2}$. Geef alle uitgesloten waarden voor de oorspronkelijke en de nieuwe formule.

b Bepaal x bij P = 4 en controleer deze uitkomst in de oorspronkelijke formule. Leg uit waarom P = 3 geen x oplevert.

10 Twee vierkante zones

Een oefenontwerp voor een vloer bestaat uit twee vierkante zones met dezelfde positieve zijde s meter en een vaste doorgang van 14 vierkante meter. De totale oppervlakte A in vierkante meter voldoet aan $A = 2s^2 + 14$.

a Geef een formule voor s in A. Vermeld welke A bij dit ontwerp zijn toegestaan.

b Bereken s als A = 86 vierkante meter. Controleer de totale oppervlakte.

c Bij A = 14 zou de nieuwe formule s = 0 geven. Is dat een bruikbaar ontwerp? Leg uit.

11 De gemiddelde workshopprijs

Voor een voor deze oefening samengestelde workshop zijn de kosten 240 euro plus 12 euro per deelnemer. Bij n deelnemers is de gemiddelde prijs k euro per deelnemer: $k = \frac{12n + 240}{n}$.

Het aantal n is een positief geheel getal.

a Maak n vrij en geef de voorwaarde voor k die uit $n > 0$ volgt.

b Kan de gemiddelde prijs precies 28 euro zijn? En precies 30 euro? Onderbouw beide antwoorden.

12 Drie omwerkingen

a Maak t vrij in $B = \frac{35}{t + 6}$. Geef de voorwaarden voor de oorspronkelijke en de nieuwe formule.

b In $U = 7w^2 + 5$ is w een positieve breedte. Maak w vrij en geef de toegestane U.

c Maak z vrij in $F = 3\sqrt{z - 4} + 2$. Geef de voorwaarden voor z en F.

De formule terugzetten

Leerdoel

Ik kan een omgewerkte formule controleren door de nieuwe formule terug te substitueren en toegestane getallen te gebruiken.

Theorie

De formule terugzetten

Controle van een uitkomst Kies alleen waarden die aan alle noemer-, wortel- en contextvoorwaarden voldoen. Bereken de vrijgemaakte letter met de nieuwe formule. Vul daarna de gekozen waarde én de berekende uitkomst in de oorspronkelijke formule in. Controleer de oorspronkelijke gelijkheid, niet alleen je laatste rekenregel. Een mislukte controle bij een toegestane waarde toont een fout aan.

Controle van een formule Eén of enkele getallencontroles bewijzen niet dat een formule altijd klopt. Zet daarom ook de hele nieuwe formule op de plek van de vrijgemaakte letter in de oorspronkelijke formule en vereenvoudig met letters. Laat zien dat je de oorspronkelijke andere kant terugkrijgt, voor alle genoemde toegestane waarden. Gebruik haakjes om het volledige ingevulde stuk en bewaar de domeinvoorwaarden. Voorbeeld 4.4C, blz. 403 controleert een positieve maat zowel numeriek als door algemene terugsubstitutie.

De voorwaarde telt mee Na het omkeren van een wortelformule moet de oorspronkelijke worteluitkomst niet negatief zijn. Als een letter $w \geq 0$ is, geldt $\sqrt{w^2} = w$. Voor $w < 0$ is de wortel van w^2 juist $-w$. Daardoor is een gekwadrateerde omwerking zonder de tekenvoorwaarde soms niet gelijkwaardig. Controleer dus de nieuwe formule samen met haar voorwaarden.

Onthoud: Een getallencontrole toetst een geval; algemene terugsubstitutie controleert de formule op het toegestane domein.

13 Terug in de oorspronkelijke formule

Bij $6u + 5v = 45$ wordt $u = \frac{45 - 5v}{6}$ voorgesteld. Alle letters mogen reële waarden hebben.

a Controleer de nieuwe formule voor een algemene v. Vervang u in $6u + 5v$ door het volledige voorstel en vereenvoudig.

b Controleer ook met $v = 3$ en met $v = 9$. Bereken telkens eerst u en vul daarna beide waarden in de oorspronkelijke vergelijking in.

13 Terug in de oorspronkelijke formule (vervolg)

c Zouden alleen deze twee getallencontroles bewijzen dat het voorstel voor elke v klopt? Leg uit wat de algemene controle bij a toevoegt.

14 Twee voorstellen

De oorspronkelijke formule is $k = \frac{4m + 6}{m + 2}$, met $m \neq -2$. Voorstel I is $m = \frac{6 - 2k}{k - 4}$. Voorstel II is $m = \frac{6 + 2k}{k - 4}$.

a Controleer beide voorstellen bij $k = 2$ door de berekende m in de oorspronkelijke formule terug te zetten. Welk voorstel valt af?

b Controleer het overblijvende voorstel door algemene terugsubstitutie. Vermeld alle uitgesloten waarden.

15 Na het kwadrateren

Bij $h = 3\sqrt{x - 1} + 2$, met $x \geq 1$, wordt $x = 1 + (\frac{h - 2}{3})^2$ voorgesteld.

a Controleer het voorstel bij $h = 5$ en bij $h = -1$. Welke controle klopt in de oorspronkelijke formule?

b Welke h laat de oorspronkelijke formule toe? Controleer het voorstel voor die h door algemene terugsubstitutie.

16 Een bezorgtijdmodel

Voor deze oefening is een bezorgtijdmodel samengesteld: $T = \frac{96 + 12n}{n + 4}$. Hierin is T de gemiddelde tijd in minuten en n het aantal extra koeriers; n is een niet-negatief geheel getal. Een omgewerkte formule is $n = \frac{96 - 4T}{T - 12}$.

a Controleer de omgewerkte formule bij $T = 18$ en bij $T = 16$. Toets zowel de oorspronkelijke formule als de voorwaarde voor n.

b Controleer de nieuwe formule ook door algemene terugsubstitutie. Waarom mag je $T = 12$ niet gebruiken, en waarom zijn de twee controles bij a geen algemeen bewijs?

17 Een sensorformule

Voor deze oefening is een sensorformule samengesteld: $R = 5\sqrt{z + 3} + 4$, met $z \geq -3$. Een voorgestelde omwerking is $z = \frac{(R - 4)^2}{25} - 3$.

a Controleer het voorstel bij $R = 14$ en bij $R = -6$. Noteer welke R de oorspronkelijke formule toelaat.

b Controleer het voorstel door algemene terugsubstitutie voor alle toegestane R. Leg uit waarom één geslaagde getallencontrole daarvoor niet voldoende is.

Van uitkomst naar bruikbare waarde

Leerdoel

Ik kan de voorwaarden uit een context gebruiken om een bruikbare uitkomst te kiezen.

Theorie

Van uitkomst naar bruikbare waarde

Drie controles Controleer eerst of de berekening mag: deel niet door nul en neem geen reële vierkantswortel van een negatief getal. Controleer vervolgens of de oorspronkelijke formule waar is. Toets ten slotte de context: een zijde kan strikt positief moeten zijn, een aantal geheel, of een afmeting minstens een bepaalde grens. Een uitkomst moet alle voorwaarden tegelijk halen.

Positief is niet hetzelfde als niet-negatief $d \geq 0$ laat $d = 0$ toe; $d > 0$ sluit die waarde uit. Bij een positieve maat met $d^2 = K$ kies je de positieve wortel en is $K > 0$ nodig. Controleer een negatieve voorgestelde maat gerust in de formule: zij kan algebraïsch passen en toch in de context afvallen. Voorbeeld 4.4C, blz. 403 maakt deze keuze bij een paneel.

Een voorwaarde vergeten Na kwadrateren kan een getal in de nieuwe formule passen terwijl de oorspronkelijke wortelformule niet klopt. De oorspronkelijke worteluitkomst moet niet-negatief blijven. Rond ook geen aantallen af om ze bruikbaar te maken: bij een vraag naar een exacte totale hoeveelheid verandert afronden de gegeven relatie.

Onthoud: Bruikbaar betekent: de berekening mag, de oorspronkelijke formule klopt en de contextvoorwaarden gelden.

18 Een zijde is positief

Voor een samengesteld schermontwerp is de totale oppervlakte $A = d^2 + 9$. Hierbij is d de zijde in centimeter van een vierkant deel, met $d > 0$. De vaste 9 is een oppervlakte in vierkante centimeter.

a Bij $A = 45$ worden $d = 6$ en $d = -6$ voorgesteld. Controleer eerst beide waarden in de formule en kies daarna de bruikbare zijde met de contextvoorwaarde.

b Bij $A = 9$ zou $d = 0$ uit de formule volgen. Beoordeel dit ontwerp met de gegeven voorwaarde.

19 Een hoogte in een model

Voor deze oefening is het inhoudsmodel $V = 3h^2 + 21$ samengesteld. V is in kubieke centimeter en h is een positieve hoogte in centimeter.

a Bij $V = 69$ worden $h = 4$ en $h = -4$ voorgesteld. Bepaal welke hoogte bruikbaar is en geef de formule waarmee je de positieve hoogte uit V berekent.

b Leg uit waarom $V = 21$ geen bruikbare hoogte geeft en $V = 18$ geen reële hoogte geeft.

20 Een uitkomst te veel

In een samengesteld model geldt $H = 2\sqrt{d - 1} + 3$. De afstand d is in meter, moet positief zijn en de wortel moet reëel zijn. Een leerling gebruikt $H = 1$ en schrijft: $\sqrt{d - 1} = -1$, dus $d - 1 = 1$ en $d = 2$. De leerling noemt 2 een toegestane afstand omdat 2 positief is.

a Waar gaat de redenering mis? Controleer $d = 2$ in de oorspronkelijke formule en beoordeel de conclusie.

b Geef de juiste omgewerkte formule met alle voorwaarden. Gebruik haar bij $H = 7$ en controleer de afstand.

4.5 Formules combineren en opstellen

Leerdoel

Ik kan een variabele vervangen door een gegeven uitdrukking en het resultaat vereenvoudigen.

Theorie

Formules combineren

Een volledige vervanging Twee formules kun je combineren als een grootheid in de ene formule gelijk is aan een uitdrukking uit de andere. Vervang de variabele overal waar hij voorkomt door die hele uitdrukking. Zet een vervanging van meer dan één term tussen haakjes. Werk daarna haakjes, producten en machten uit en neem gelijksoortige termen samen. Een kwadraat van een som of verschil is niet de som of het verschil van de kwadraten. Bij een breuk vervang je de variabele zowel in de teller als in de noemer als hij daar voorkomt.

Hetzelfde model, andere invoer Een formule met een nieuwe invoervariabele behoudt de voorwaarden uit de oorspronkelijke formules. Een noemer of deler mag nooit nul worden; een wortel moet een niet-negatieve inhoud hebben. Houd ook de grenzen en toegestane aantallen uit de context aan. Controleer een berekende waarde via beide oorspronkelijke formules. Bij een eenhedencontrole moeten opgetelde termen dezelfde eenheid hebben. Een factor bij tijd heeft de eenheid van de uitkomst per tijdseenheid. In voorbeeld 4.5A, blz. 404 zie je hoe je een kwadratisch model combineert en controleert.

Onthoud: Vervang de hele uitdrukking op elke plaats van de variabele.

1 Kosten van een werkplek

Voor deze oefening zijn de tarieven van een werkplek samengesteld. Een reservering kost $H = 12 + 4u$ euro. Hierin is u het aantal draaiuren van een apparaat. Tijdens een reservering van t uur draait het apparaat drie kwart van de tijd: $u = 0{,}75t$. Het model geldt voor $0 \leq t \leq 6$; ook een reservering zonder gebruik is mogelijk. De 12 euro zijn vaste reserveringskosten en het tarief is 4 euro per draaiuur.

a Vervang u in $H = 12 + 4u$ door $0{,}75t$. Schrijf de vervanging eerst tussen haakjes en vereenvoudig daarna de formule voor H.

b Bereken H voor een reservering van 4 uur. Controleer door ook het aantal draaiuren te berekenen.

c Welke eenheid moet de coëfficiënt 3 in $H = 12 + 3t$ hebben? Controleer de formule bovendien bij $t = 0$ en leg de uitkomst uit.

2 Een kwadratische uitdrukking

Gegeven zijn $S = 3x^2 - 4x + 7$ en $x = 2t - 1$. De variabelen zijn dimensieloos en t mag elk reëel getal zijn.

a Stel een formule voor S op die alleen t bevat en werk alle haakjes weg.

b Bereken S bij $t = -1$ en controleer de uitkomst via x.

3 Een breuk samenstellen

Voor $t \geq 0$ gelden $r = \frac{36}{t+2}$ en $G = 150 + 5r$. Alle variabelen zijn dimensieloos.

a Schrijf G als één breuk met t als enige variabele.

b Bereken G voor $t = 4$ met de breuk uit a en ook met de twee oorspronkelijke formules.

4 Energie tijdens een vaartocht

De gegevens van deze elektrische vaartocht zijn samengesteld voor de oefening. Na in totaal d km varen bevat een accu volgens het model $E = 480 - 12d$ Wh. Op het gekozen meetbegin heeft de boot al 6 km gevaren. Daarna vaart hij 2,5 km per uur, zodat $d = 6 + 2{,}5t$. Hierin is t het aantal uren na het meetbegin. Het model wordt alleen gebruikt voor $0 \leq t \leq 8$.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de resterende energie E als functie van t.

b Het waarschuwingslampje gaat aan zodra er precies 300 Wh over is. Bereken hoeveel tijd na het meetbegin dit gebeurt. Geef ook de totale gevaren afstand op dat moment.

5 Volledige ventilatiekleppen

Voor een oefenmodel van een lege opslagruimte zijn de volgende gegevens samengesteld. Met n geopende kleppen is de luchtstroom $Q = 4 + 0{,}8n$ m^3 per minuut. Eén verversing van 180 m^3 duurt $D = \frac{180}{Q}$ minuten. Het aantal geopende kleppen is een geheel getal met $0 \leq n \leq 20$. Alle kleppen gaan volledig open of blijven volledig dicht. Gebruik het model zonder tussentijds af te ronden.

a Stel een formule voor D op met alleen n en schrijf die zo dat de noemer $n + 5$ is.

b Hoeveel kleppen moeten minimaal volledig openstaan om één verversing in hoogstens 15 minuten uit te voeren? Toon aan dat één klep minder niet genoeg is.

6 Gemiddeld bedrag per abonnement

De volgende gegevens zijn samengesteld voor een abonnementsmodel. Na t hele dagen zijn er $n = 25 + 5t$ abonnementen. De totale kosten zijn $K = 60 + 2{,}4n$ euro. Het gemiddelde bedrag per abonnement is $A = \frac{K}{n}$. Het model geldt voor gehele t met $0 \leq t \leq 12$.

a Stel een vereenvoudigde formule voor A op waarin alleen t voorkomt.

b Bepaal de eenheid van A. Een medewerker beweert dat $A = 0$ bij $t = 0$. Beoordeel die bewering met het model en verklaar de uitkomst.

Van tekst naar formule

Leerdoel

Ik kan een formule opstellen uit de samenhang van grootheden in een tekst.

Theorie

Van tekst naar formule

Bouw de samenhang op Kies welke grootheid je wilt berekenen en welke variabele de invoer is. Schrijf de betekenis en eenheid van beide op. Splits het verhaal in onderdelen. Een vast bedrag tel je eenmaal mee; een bedrag per stuk vermenigvuldig je met het aantal stuks. Een gemiddeld bedrag is het totale bedrag gedeeld door het bijbehorende aantal. Een percentage werkt alleen op het onderdeel waarop het volgens de tekst van toepassing is. Na 15% korting blijft van dat onderdeel 85% over.

Tel wat er werkelijk is Let bij aantallen op wat geteld wordt. Een rij van n onderdelen heeft bijvoorbeeld n − 1 aansluitingen. Geef bij een formule aan of de invoer alle reële waarden of alleen gehele aantallen mag zijn. Een antwoord op een vraag over volledige onderdelen moet een geheel aantal zijn dat echt aan de eis voldoet. Controleer het naastgelegen aantal als je een minimum of maximum zoekt. In voorbeeld 4.5B, blz. 405 worden afzonderlijke onderdelen tot één kostenformule opgebouwd.

Onthoud: Definieer je variabele, haar eenheid en haar toegestane waarden.

7 Panelen laten snijden

De tarieven voor deze oefening zijn samengesteld. Een snijbedrijf rekent 14 euro voorbereiding per bestelling. Voor elk paneel is 1,2 m^2 materiaal nodig. Materiaal kost 2,50 euro per m^2 en de bewerking kost 0,80 euro per paneel. Er worden n panelen besteld; n is een geheel getal met $1 \leq n \leq 100$. Er zijn geen andere kosten.

a Schrijf afzonderlijke formules voor de materiaalkosten M en de bewerkingskosten B bij n panelen.

b Stel een vereenvoudigde formule op voor het totale bedrag C. Bereken ook het bedrag voor 25 panelen.

c Een bestelling mag hoogstens 90 euro kosten. Bereken hoeveel volledige panelen maximaal besteld kunnen worden.

8 Toegangscodes verkopen

Een vereniging bestelt en verkoopt n digitale toegangscodes. Alle bestelde codes worden verkocht. De gegevens zijn samengesteld voor de oefening. De inkoopprijs is 4,50 euro per code; daarop krijgt de vereniging 10% korting. De vaste orderkosten van 9 euro krijgen geen korting. De verkoopprijs is 6,50 euro per code. Het aantal n is een geheel getal met $1 \leq n \leq 80$. Het nettoresultaat W is de totale verkoopopbrengst min alle genoemde kosten.

a Stel een formule op voor de totale kosten C bij n codes.

b Stel een vereenvoudigde formule op voor W. Bereken hoeveel codes minimaal verkocht moeten worden om een positief nettoresultaat te hebben.

9 Een wand met overlap

Een tijdelijke wand bestaat uit n identieke rechthoekige doeken van 1,20 m breed en h m hoog. Twee naast elkaar gelegen doeken overlappen over een strook van 0,06 m breed en over de volledige hoogte. Er zijn precies $n - 1$ aansluitingen. Elk doek sluit alleen aan op zijn directe buren; er zijn geen andere overlappingen. Het aantal n is een geheel getal met $1 \leq n \leq 15$ en $h > 0$. De opgegeven maten zijn gekozen voor de oefening.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de zichtbare oppervlakte A van de hele wand.

b Bereken de zichtbare oppervlakte bij 8 doeken die elk 2 m hoog zijn. Controleer door de totale doekoppervlakte en de overlap apart te berekenen.

10 Kasten in een archiefruimte

Voor deze oefening zijn de maten van een archiefruimte en kasten gekozen. Langs één wand worden n volledige kastdelen geplaatst. Elk kastdeel is 1,05 m breed. Tussen elk paar naast elkaar gelegen kastdelen blijft 0,06 m ruimte. Links van het eerste en rechts van het laatste kastdeel moet elk 0,40 m vrij blijven. Bij n kastdelen zijn er precies $n - 1$ tussenruimten. De beschikbare wandlengte is 7,50 m. Er wordt minstens één kastdeel geplaatst; n is een positief geheel getal.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de totale benodigde wandlengte B bij n kastdelen.

b Bepaal het grootste aantal volledige kastdelen dat langs de wand past. Laat zien waarom het volgende aantal niet past. Een rekenmachine mag worden gebruikt.

11 Een kleurmengsel verdunnen

Een oefenmodel beschrijft een kleurmengsel. Er is 3,5 liter basisvloeistof met 18 gram pigment per liter. Daar wordt x liter water zonder pigment aan toegevoegd. Neem voor dit model aan dat de vloeistofvolumes optellen, er niets verloren gaat en het mengsel gelijkmatig verdeeld is. De getallen zijn samengesteld voor de oefening. Er geldt $0 \leq x \leq 7$. De pigmentconcentratie c is het totale aantal gram pigment gedeeld door het totale aantal liter vloeistof.

a Hoeveel gram pigment bevat het mengsel na toevoeging van x liter water? Stel vervolgens een formule op voor c in gram per liter.

b Hoeveel liter water moet worden toegevoegd om de concentratie precies 9 gram per liter te maken? Controleer ook met het totale volume.

12 Een bestelling bij een fotokiosk

De prijzen voor deze oefening zijn samengesteld. Een kiosk levert één bestelling van n vellen. Op elk vel staan precies zes afbeeldingen. Een afbeelding kost 0,18 euro; op alle afbeeldingskosten van deze bestelling geldt 15% korting. Het papier kost daarnaast 0,60 euro per vel en krijgt geen korting. Per bestelling wordt 4 euro verwerking gerekend, ook zonder korting. Er zijn geen andere kosten. Het aantal n is een geheel getal met $1 \leq n \leq 50$. Rond alleen het uiteindelijke te betalen bedrag af op centen.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor het totale bedrag K bij n vellen.

b Bepaal hoeveel volledige vellen maximaal besteld kunnen worden met een budget van 25 euro. Een rekenmachine mag worden gebruikt.

Een model aanpassen

Leerdoel

Ik kan een formule wijzigen wanneer een contextvoorwaarde of parameter verandert.

Theorie

Een model aanpassen

Wat verandert er? Koppel elk getal in een formule aan zijn betekenis. Bepaal dan welke onderdelen veranderen: een beginwaarde, een tarief, een snelheid, een hoeveelheid of een vaste toeslag. Een verhoging van p% betekent vermenigvuldigen met 1 + p ÷ 100; een verlaging van p% met 1 − p ÷ 100. Pas dit alleen toe op het bedoelde onderdeel. Een extra hoeveelheid binnen een tarief hoort binnen de vermenigvuldiging; een afzonderlijke vaste toeslag hoort erbuiten.

De variabele blijft duidelijk Als de betekenis van de invoervariabele hetzelfde blijft, behoud je die betekenis ook in de nieuwe formule. Wordt de werkelijke hoeveelheid groter dan de geplande hoeveelheid, schrijf dan eerst het verband tussen die twee. Vereenvoudig pas nadat alle veranderingen op de juiste plek staan. Vergelijk zo nodig oud en nieuw via het verschil van de formules. Houd het modeldomein aan. In voorbeeld 4.5B, blz. 405 worden de materiaalvoorwaarde en de materiaalprijs afzonderlijk aangepast.

Onthoud: Verander ieder onderdeel vanuit zijn betekenis, daarna pas herleiden.

13 Andere tarieven voor opslagvakken

Een fictieve verhuurdienst rekent per evenement K = 50 + 6n euro voor n opslagvakken. De 50 euro zijn vaste servicekosten en elk vak kost 6 euro. Het aantal n is een geheel getal met 1 ≤ n ≤ 40. Voor het volgende evenement worden de vaste servicekosten met 20% verhoogd en wordt het tarief per vak met 15% verlaagd. Er veranderen geen andere voorwaarden.

a Bereken eerst de nieuwe vaste servicekosten en het nieuwe tarief per vak. Stel daarna een vereenvoudigde formule op voor de nieuwe kosten N.

b Schrijf N − K als een vereenvoudigde formule. Vanaf welk aantal vakken zijn de nieuwe kosten lager dan de oude kosten?

14 Een ander dalingsmodel

Een proef met een waterkolom heeft het model H = 32 – 0,8t. H is de hoogte in centimeter en t de tijd in minuten. In een tweede, fictieve proef is de beginhoogte 28 cm en is de dalingssnelheid 75% van de oorspronkelijke dalingssnelheid. Voor beide proeven geldt het tijdsdomein $0 \le t \le 40$. De daling wordt in elk model constant verondersteld.

a Stel de formule voor de hoogte G in de tweede proef op.

b Bereken wanneer de twee waterkolommen dezelfde hoogte hebben en bepaal die hoogte.

15 Een gewijzigde scanopdracht

Een samengesteld oefenmodel geeft de scantijd $T = \frac{4n+18}{2,5}$ seconden voor n bestanden. Elk bestand bevat vier pagina's. Voor elke opdracht worden daarnaast 18 kalibratiepagina's gescand. De scanner verwerkt 2,5 pagina per seconde. Het aantal n is een geheel getal met $0 \le n \le 20$. Bij een nieuwe werkwijze bevatten de bestanden elk zes pagina's, is de scansnelheid 40% hoger en duurt het opstarten vóór het scannen 8 seconden. Er blijven 18 kalibratiepagina's. De opstarttijd hoort niet bij de tijd in de breuk.

a Stel de nieuwe tijdformule U op.

b Vergelijk de oude en nieuwe tijd bij 10 bestanden. Verklaar waarom een hogere scansnelheid hier niet automatisch een kortere opdracht geeft. Een rekenmachine mag worden gebruikt; rond de tijden af op één decimaal.

16 Een route met een omleiding

Voor de oefening zijn tarieven van een bezorgroute samengesteld. De oude routekosten zijn C = 45 + 1,20d euro, waarbij d de geplande totale afstand in kilometer is. Het model geldt voor $20 \le d \le 250$. Een nieuwe regeling verhoogt de vaste kosten met 12 euro en verlaagt het tarief per kilometer met 10%. Tegelijk komt er bij elke geplande route door een omleiding precies 8 km bij. De variabele d blijft de oorspronkelijk geplande afstand; de nieuwe werkelijk gereden afstand is d + 8.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de nieuwe routekosten N als functie van d.

b Voor welke oorspronkelijk geplande afstanden zijn de nieuwe routekosten lager dan de oude? Bereken ook de afstand waarbij de twee bedragen gelijk zijn.

17 Een pomp met naspoelen

Een fictief oefenmodel beschrijft een pompbeurt. Om V liter af te leveren is de oude tijd T = $\frac{V}{12}$ + 4 minuten. De pomp verplaatst 12 liter per minuut en de voorbereiding duurt 4 minuten.

In een nieuwe opstelling is de snelheid 15 liter per minuut en duurt de voorbereiding 2,5 minuten. Bij iedere beurt wordt bovendien 6 liter naspoelwater door de pomp verplaatst. Het naspoelwater wordt niet bij de afgeleverde hoeveelheid V geteld. Er geldt $0 \leq V \leq 300$.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de nieuwe totale tijd U als functie van V.

b Een medewerker zegt: “De nieuwe opstelling bespaart bij elke hoeveelheid 2,6 minuten.” Onderzoek dit met een formule voor de tijdwinst T – U en geef twee passende invoerwaarden.

18 Een gewijzigd rekenmodel

Voor een fictieve softwaretest geldt $A = \frac{150}{n+5}$ seconden. Hierin is n het aantal toegevoegde rekenmodules. De 5 staat voor vijf al aanwezige modules; alle modules worden in dit model als even krachtig beschouwd. De 150 is evenredig met de hoeveelheid rekenwerk. Bij een nieuwe test is er 20% minder rekenwerk, zijn er slechts drie al aanwezige modules en komt er een vaste starttijd van 0,5 seconde bij. Het aantal toegevoegde modules n blijft een geheel getal met $0 \leq n \leq 24$.

a Stel een formule op voor de totale tijd B van de nieuwe test als functie van n.

b Bepaal het kleinste aantal toegevoegde modules waarmee de nieuwe test in hoogstens 8 seconden klaar is.

Een formule controleren

Leerdoel

Ik kan een samengestelde formule controleren op eenheden en op bijzondere invoerwaarden.

Theorie

Een formule controleren

Eenheden moeten passen Termen die je optelt of aftrekt, moeten dezelfde eenheid hebben. Bij vermenigvuldigen en delen worden eenheden mee vermenigvuldigd of gedeeld. Een bedrag gedeeld door een aantal geeft een bedrag per stuk. Een tarief per vierkante meter moet worden gecombineerd met een oppervlakte in vierkante meter. Reken daarvoor lengtes om vóór je de oppervlakte berekent: 100 cm is 1 m en 10 000 cm^2 is 1 m^2. Voor volume geldt 1000 cm^3 = 1 liter.

Controleer ook de grenzen Een bijzondere invoerwaarde, zoals nul of een domeineindpunt, kan laten zien of een formule bij de situatie past. Nul is alleen bruikbaar als de context en de oorspronkelijke formule die invoer toestaan. Een gemiddelde per onderdeel bestaat niet bij nul onderdelen. Controleer daarnaast minstens één andere geldige waarde: twee verschillende formules kunnen bij nul toevallig hetzelfde geven. Een eenhedencontrole en enkele ingevulde waarden kunnen fouten aantonen, maar bewijzen geen gelijkwaardigheid voor alle invoerwaarden. In voorbeeld 4.5B, blz. 405 worden de eenheden en een ongeldige nulwaarde besproken.

Onthoud: Controleer de eenheden én of de gekozen invoer in het domein ligt.

19 Lengtematen bij een coating

Voor de oefening is een coatingverbruik van 0,15 liter per m^2 gekozen. De coating komt op een rechthoekige strook van 80 cm breed. Bij n volledige segmenten is de lengte 120n cm. Er geldt $0 \le n \le 12$ en n is een geheel getal; bij n = 0 is er geen strook. Een leerling schrijft voor het verbruik in liter: $V = 0{,}15 \times 120n \times 80$.

a Leg uit waarom deze formule een verkeerde hoeveelheid in liter geeft. Zet eerst de lengtes om naar meter en stel dan de juiste vereenvoudigde formule voor V op.

b Controleer de juiste formule bij n = 0 en bereken het verbruik bij vijf segmenten. Geef bij beide uitkomsten de eenheid en de betekenis.

20 Gemiddeld vloeistofgebruik

Een samengesteld oefenmodel beschrijft het vloeistofgebruik bij het reinigen van onderdelen. Per reinigingsbeurt wordt 750 ml voor het starten gebruikt en 25 ml per rek. Elk rek bevat precies drie onderdelen. Er worden n volledig gevulde rekken gereinigd, waarbij n een geheel getal is met $1 \le n \le 30$. Het gemiddelde totale vloeistofgebruik per onderdeel is $A = \frac{750+25n}{3n}$.

Een medewerker stelt als alternatief $B = 250 + \frac{25}{3}n$ voor.

a Welke eenheid heeft A? Leg uit waarom $n = 0$ niet in het domein kan worden opgenomen, ook al is er dan nog een startverbruik van 750 ml.

b Controleer of B gelijkwaardig is aan A door beide formules bij $n = 1$ en bij $n = 2$ te onderzoeken. Verklaar wat deze controles wel en niet aantonen.

21 Een bak vullen

Een rechthoekige bak heeft binnenmaten 80 cm bij 40 cm bij 12 cm hoog. Bij het meetbegin staat er water tot 2 cm hoogte. Voor deze oefening wordt aangenomen dat de waterhoogte tijdens het vullen constant met 0,5 cm per minuut stijgt, totdat de bak vol is. Er zijn geen verliezen. Voor de hoogte geldt $h = 2 + 0{,}5t$, met t in minuten vanaf het meetbegin. Een leerling schrijft voor het volume in liter: $W = 3200(2 + 0{,}5t)$.

a Controleer de eenheid van de uitkomst van W. Stel de juiste vereenvoudigde formule op voor het volume V in liter.

b Bepaal het geldige tijdsdomein van de volumeformule zolang er geen water over de rand gaat. Beoordeel of invullen van $t = 22$ een passende modeluitkomst geeft.

c Controleer de formule bij het meetbegin en op het tijdstip waarop de bak precies vol is. Vergelijk met een directe volumeberekening.

22 Een route-index

Een fictief spel gebruikt de route-index $I = \frac{100d}{d+40}$. De afstand d wordt in km gemeten; de constante 40 staat voor 40 km. De uitkomst I is het getal dat als percentage wordt weergegeven. Een speler legt $d = 3t$ km af, met t de tijd in uren en $t \geq 0$. Een leerling vervangt dit door $J = \frac{300t}{t+40}$. Hij zegt: “Bij $t = 0$ geeft mijn formule dezelfde uitkomst. Dus hij is correct. De uitkomst is in km.”

a Verbeter de formule van de leerling en beoordeel zijn uitspraak over de eenheid. Geef ook aan of de juiste noemer nul kan worden binnen het modeldomein.

b Onderzoek de controle bij $t = 0$ en vergelijk de twee formules bij $t = 10$. Beoordeel de conclusie dat één overeenkomende invoerwaarde de formule bewijst. Een rekenmachine mag worden gebruikt; rond percentages af op één decimaal.

Herhaling

Haal de vaardigheden van dit hoofdstuk terug. Schrijf je tussenstappen op. De antwoorden staan achterin.

1 Uitdrukkingen vergelijken

a Werk alle haakjes weg in $-(2x - 5)(x + 3) + 3(x - 2)$ en vereenvoudig.

b Vereenvoudig $5u^2 - 3u + 4 - 2u^2 + 7u - 9$.

c Schrijf $12r^2 - 18r$ als een product met de grootst mogelijke gemeenschappelijke gehele factor buiten haakjes.

d Een leerling schrijft $4(2v - 1) - 3v = 5v - 4$. Controleer dit bij $v = -2$ en $v = 3$ en verantwoord vervolgens de gelijkheid voor elke v.

e Vereenvoudig $\frac{15w^2 + 10w}{5w}$. Vermeld de oorspronkelijke beperking.

f Voor welke z is $\frac{z + 2}{z - 4} \div \frac{z - 1}{z + 5}$ niet toegestaan? Licht elke uitgesloten waarde toe.

2 Vijf berekeningen

a Vereenvoudig $\frac{3}{2p} + \frac{5}{3p}$, met $p \neq 0$.

b Vereenvoudig $\frac{6q}{5} \times \frac{10}{3q} \div \frac{4q}{7}$, met $q \neq 0$.

c Schrijf $\frac{(h^3)^2 \times h^4}{h^5}$ als één macht, met $h \neq 0$.

d Schrijf $(2k)^{-3}$ als een breuk met alleen positieve exponenten. Geef de voorwaarde.

e Herschrijf $\sqrt{\frac{9m}{4}}$ zonder een breuk onder het wortelteken. Geef de voorwaarde voor reële waarden.

3 Meten en verdelen

De situaties en waarden in deze opgave zijn samengesteld voor de oefening. Bij een bewegend punt geldt $d = 6\sqrt{t}$, met d in meter en t in seconden, $t \geq 0$. Bij het verdelen van 72 mL vloeistof over n gelijke porties geldt $V = \frac{72}{n}$, met V in mL en n een positief geheel getal.

a Bereken d na 9 seconden. Vergelijk de afstanden na 4 en 16 seconden en leg uit of de verandering past bij de formule.

b Schrijf $4x + 5y = 45$ in de vorm $y = ax + b$.

c Maak n vrij in $V = \frac{72}{n}$. Vermeld welke voorwaarden blijven gelden.

d Controleer de formule uit c bij V = 12 mL door de uitkomst in de oorspronkelijke formule in te vullen.

e Volgens de omgewerkte formule levert V = 5 mL de waarde n = 14,4 op. Is dit een bruikbare verdeling binnen deze situatie? Licht je antwoord toe.

4 Verzendservice

Dit rekenmodel is samengesteld voor de oefening. Een batch bevat n pakketten, n is een geheel getal en $n \geq 0$. De gemiddelde massa per pakket is $m = 0{,}6 + 0{,}02n$ kg. Een krat weegt 2 kg. De totale massa is $M = nm + 2$ kg. De kosten in euro zijn $C = 4M + 7$: de service rekent 4 euro per kg en 7 euro vast.

a Schrijf C als een formule waarin alleen n voorkomt. Vereenvoudig.

b De klant betaalt 3,20 euro per pakket en daarnaast 5 euro vast. Stel een formule voor de inkomsten R in euro op.

c De krat wordt vervangen door een krat van 3 kg. De prijs wordt 4,50 euro per kg; het vaste bedrag blijft 7 euro. De formule voor m blijft gelijk. Stel de nieuwe kostenformule in n op.

d Controleer de eenheden in de oorspronkelijke samengestelde kostenformule en de uitkomst bij n = 0. Wat betekent die uitkomst?

Gericht verder oefenen

Kies na de herhaling de opgaven die passen bij een fout of een ontbrekende stap. De aanwijzingen helpen je de berekening opnieuw op te bouwen. Controleer pas daarna met de uitwerkingen.

5 Opnieuw beginnen

Gebruik de korte aanwijzing bij iedere vraag. Schrijf daarna zelf de volledige berekening.

a Werk $-2(x - 4) + (x - 1)(x + 2)$ uit. Aanwijzing: vermenigvuldig iedere term in een haakje met de factor die erbij hoort; zet bij het eerste product het minteken op papier.

b Vereenvoudig $8a^2 - 4a + 3 - 5a^2 - 2a - 7$. Aanwijzing: groepeer termen met dezelfde letter en dezelfde exponent.

c Haal een zo groot mogelijke gehele gemeenschappelijke factor buiten haakjes in $20b^2 + 15b$. Aanwijzing: zoek eerst de getalfactor en daarna de gemeenschappelijke letterfactor.

d Een leerling schrijft $3(2c + 1) - 4c = 2c + 1$. Controleer bij $c = 2$ en verbeter de herschrijving voor elke c. Aanwijzing: vergelijk beide uitkomsten en werk daarna de oorspronkelijke haakjes uit.

e Vereenvoudig $\frac{14d^2 - 21d}{7d}$ en vermeld de beperking. Aanwijzing: zet de teller eerst als product; schrap alleen een factor.

6 Nog een ronde

Gebruik de aanwijzingen om één tussenstap tegelijk op te schrijven.

a Vereenvoudig $\frac{5}{6x} - \frac{1}{4x}$, met $x \neq 0$. Aanwijzing: maak de noemers gelijk aan $12x$.

b Vereenvoudig $\frac{3y}{8} \times \frac{4}{y} \div \frac{y}{6}$, met $y \neq 0$. Aanwijzing: vervang delen door $\frac{y}{6}$ door vermenigvuldigen met $\frac{6}{y}$.

c Welke waarden zijn uitgesloten in $\frac{z}{z-2} \div \frac{z+4}{z+1}$? Aanwijzing: controleer beide oorspronkelijke noemers en daarna of de deler 0 is.

d Schrijf $\frac{(p^2)^3 \times p}{p^4}$ als één macht, met $p \neq 0$. Aanwijzing: begin met de macht van de macht.

e Schrijf $5q^{-2}$ als een breuk met positieve exponenten. Aanwijzing: alleen q heeft hier de exponent -2.

7 Met een tussenstap

De contextformules zijn samengesteld voor de oefening. In vraag b is t een tijd in minuten en S een afgelegde afstand in meter. In vragen d tot en met f zijn t een tijd in minuten en h een hoogte in cm.

a Herschrijf $\sqrt{\frac{16r}{9}}$ zonder breuk onder het wortelteken en geef de voorwaarde.
Aanwijzing: neem de wortels van 16 en 9 afzonderlijk.

b Voor $S = 5\sqrt{t}$, $t \geq 0$, bereken je de afstand bij $t = 4$ en $t = 25$. Past de tweede uitkomst bij de langere tijd? Aanwijzing: neem eerst de wortel en vermenigvuldig daarna met 5.

c Maak y vrij in $6x + 3y = 27$. Aanwijzing: breng eerst de term met x naar de andere kant en deel daarna door de factor van y.

d Bij een proef geldt $h = 3\sqrt{t} + 2$, met $t \geq 0$ en $h \geq 2$. Maak t vrij. Aanwijzing: isoleer eerst $\sqrt{t}$; de beide kanten zijn dan niet-negatief, zodat je ze kunt kwadrateren.

e Controleer je formule uit d bij $h = 11$ cm. Aanwijzing: bereken t en vul daarna in de oorspronkelijke h-formule in.

f Het meetapparaat registreert alleen $0 \leq t \leq 8$. Is de uitkomst uit e bruikbaar binnen deze meting? Aanwijzing: vergelijk je uitkomst met de gegeven tijdgrenzen.

8 De pakketbalie

Dit model is samengesteld voor de oefening. Bij n pakketten is de totale massa $M = 0{,}25n + 1$ kg. De kosten in euro zijn $C = 6M + 8$, met 6 euro per kg en 8 euro vast. n is een geheel getal en $n \geq 0$.

a Schrijf C als formule in n en vereenvoudig. Aanwijzing: zet de hele uitdrukking voor M tussen haakjes op de plaats van M.

b Een klant betaalt 4 euro per pakket en 2 euro vast. Stel de inkomstenformule R op. Aanwijzing: splits het bedrag in een variabel en een vast deel.

c De prijs per kg wordt 7 euro en de verpakking wordt 1,5 kg in plaats van 1 kg. Het vaste bedrag blijft 8 euro. Schrijf de gewijzigde kostenformule in n. Aanwijzing: wijzig eerst de massaformule en daarna de prijsfactor.

d Controleer de nieuwe formule op eenheden en bij $n = 0$. Aanwijzing: het product van euro per kg en kg moet een bedrag opleveren.

Nieuwe controle

Maak deze nieuwe vragen zelfstandig en zonder de uitwerkingen. Noteer ook de gevraagde voorwaarden en conclusies.

9 Nieuwe controle I

Werk zelfstandig. Schrijf de gevraagde berekeningen en conclusies op.

a Werk $-(x - 2)(2x + 1) + 4x - 3$ uit en vereenvoudig.

b Schrijf de teller van $\frac{18y^2 - 12y}{6y}$ als product. Vereenvoudig de breuk en geef de oorspronkelijke beperking.

c Vereenvoudig $(\frac{1}{2z} + \frac{1}{3z}) \times \frac{3z}{5} \div \frac{z - 1}{2}$. Vermeld alle oorspronkelijke beperkingen.

d Schrijf $\frac{(p^2)^2 \times p^{-1}}{p^5}$ met alleen positieve exponenten. Geef de voorwaarde.

e Een voor deze oefening samengesteld model is $L = \sqrt{\frac{49t}{4}}$, met $t \geq 0$ in seconden en L in meter. Herschrijf de formule zonder breuk onder het wortelteken. Bereken L bij $t = 16$ en controleer of dit past bij L bij $t = 4$.

f Beoordeel de gelijkheid $2(3q - 1) - q = 5q - 2$. Controleer bij $q = -1$ en verantwoord je oordeel voor elke q.

10 Nieuwe controle II

De modellen en waarden zijn samengesteld voor de oefening. In b en c geldt $d = 4\sqrt{t}$, met d in meter, t in seconden en $t \geq 0$. In d en e bevat een rit n pakketten, met n een geheel getal en $n \geq 0$. De massa is $M = 0{,}4n + 1{,}2$ kg en de kosten zijn $C = 5M + 6$ euro: 5 euro per kg en 6 euro vast.

a Schrijf $7x + 2y = 31$ in de vorm $y = ax + b$.

b Maak t vrij in het model voor d. Controleer je formule bij d = 12 meter in de oorspronkelijke formule.

c Een ingevoerde afstand $d = -8$ levert in de omgewerkte formule $t = 4$ op. Is dit een bruikbare uitkomst? Controleer in de oorspronkelijke formule.

d Schrijf de kosten C als formule in n. Controleer de eenheden en de uitkomst bij $n = 0$.

e De klant betaalt 3 euro per pakket en 9 euro vast. Stel de inkomstenformule R op. De afspraak verandert naar 4 euro per pakket en 7 euro vast. Stel ook de gewijzigde inkomstenformule op.

Terugblik op de twintig doelen

Gebruik dit overzicht nadat je Test jezelf hebt gemaakt en nagekeken.

Noteer per doel: dit kan ik zelfstandig, dit lukt met hulp, of dit wil ik opnieuw oefenen. Gebruik de uitwerkingen om de eerste onjuiste stap te vinden.

Kies één doel om opnieuw te oefenen. Maak de bijbehorende herstelvraag en vervolgens de nieuwe controlevraag zonder aanwijzingen. Schrijf tot slot in één zin welke stap je nu zelf kunt uitleggen.

4.1 · Leerdoel 1: Ik kan haakjes met één of twee factoren wegwerken, ook met negatieve factoren.

4.1 · Leerdoel 2: Ik kan gelijksoortige termen samenvoegen tot een equivalente uitdrukking.

4.1 · Leerdoel 3: Ik kan een gemeenschappelijke factor buiten haakjes halen.

4.1 · Leerdoel 4: Ik kan een algebraïsche herschrijving controleren met invulwaarden en geldige stappen verantwoorden.

4.2 · Leerdoel 1: Ik kan letterbreuken vereenvoudigen door gemeenschappelijke factoren te herkennen.

4.2 · Leerdoel 2: Ik kan letterbreuken optellen of aftrekken met een gemeenschappelijke noemer.

4.2 · Leerdoel 3: Ik kan letterbreuken vermenigvuldigen en delen.

4.2 · Leerdoel 4: Ik kan aangeven welke waarden niet toegestaan zijn door een nul in een noemer of deler.

4.3 · Leerdoel 1: Ik kan producten, quotiënten en machten van machten herschrijven met de machtsregels.

4.3 · Leerdoel 2: Ik kan negatieve gehele exponenten herschrijven als breuken met positieve gehele exponenten.

4.3 · Leerdoel 3: Ik kan eenvoudige worteluitdrukkingen herschrijven en de voorwaarden vermelden.

4.3 · Leerdoel 4: Ik kan formules met machten of wortels gebruiken en de uitkomst op plausibiliteit controleren.

4.4 · Leerdoel 1: Ik kan een variabele vrijmaken met lineaire bewerkingen, ook als dezelfde letter meer dan één keer voorkomt, en een lijn schrijven als $y = ax + b$.

4.4 · Leerdoel 2: Ik kan een variabele vrijmaken in de behandelde formules met een breuk, een eenvoudig kwadraat of een vierkantswortel.

4.4 · Leerdoel 3: Ik kan een omgewerkte formule controleren door de nieuwe formule terug te substitueren en toegestane getallen te gebruiken.

4.4 · Leerdoel 4: Ik kan de voorwaarden uit een context gebruiken om een bruikbare uitkomst te kiezen.

4.5 · Leerdoel 1: Ik kan een variabele vervangen door een gegeven uitdrukking en het resultaat vereenvoudigen.

4.5 · Leerdoel 2: Ik kan een formule opstellen uit de samenhang van grootheden in een tekst.

4.5 · Leerdoel 3: Ik kan een formule wijzigen wanneer een contextvoorwaarde of parameter verandert.

4.5 · Leerdoel 4: Ik kan een samengestelde formule controleren op eenheden en op bijzondere invoerwaarden.

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
Test jezelf opgave 11a–d	Haakjes, gelijksoortige termen, factor en gelijkwaardigheid	Gericht verder oefenen opgave 5a–d	Nieuwe controle opgave 9a–b,f
Test jezelf opgave 12a–d	Letterbreuken en oorspronkelijke domeinvoorwaarden	Gericht verder oefenen opgave 5e; Gericht verder oefenen opgave 6a–c	Nieuwe controle opgave 9b–c
Test jezelf opgave 13a–d	Machten, negatieve exponenten, wortel en plausibiliteit	Gericht verder oefenen opgave 6d–e; Gericht verder oefenen opgave 7a–b	Nieuwe controle opgave 9d–e; 4.3 opgave 15b
Test jezelf opgave 14a–d	Vrijmaken, terugcontrole en bruikbare uitkomst	Gericht verder oefenen opgave 7c–f; 4.4 opgave 7a–b	Nieuwe controle opgave 10a–c; 4.4 opgave 12a
4.4 opgave 2a; 4.4 opgave 12b–c; 4.4 opgave 17b (aanvullend op Test jezelf)	Herhaalde doelletter, kwadraat/wortel en algemene terugsubstitutie	4.4 opgave 2a; 4.4 opgave 7b–c; 4.4 opgave 13a–c	4.4 opgave 9a; 4.4 opgave 10a; 4.4 opgave 14b; 4.4 opgave 15b
Test jezelf opgave 15a–d	Formules combineren, opstellen, aanpassen en controleren	Gericht verder oefenen opgave 8a–d	Nieuwe controle opgave 10d–e; 4.5 opgave 22a–b

Voorbeeld 4.1A

Een verschil van producten

a Herleid $E = (x - 3)(x + 2) - x(x - 1)$. Controleer je uitkomst voor $x = 4$.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking voor E, met dezelfde waarde voor elke x.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de distributieve eigenschap om beide producten uit te werken. Daarna verwerk ik de min vóór het tweede product en voeg ik gelijksoortige termen samen; die regels bewaren de waarde.

3. Berekening

$(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$. Verder $x(x - 1) = x^2 - x$. Dus $E = x^2 - x - 6 - (x^2 - x) = x^2 - x - 6 - x^2 + x = -6$.

4. Antwoord in context

De uitdrukking E heeft voor elke x de waarde -6; er blijven geen lettertermen over.

5. Controle

Voor $x = 4$ is de oorspronkelijke vorm $(4 - 3)(4 + 2) - 4(4 - 1) = 6 - 12 = -6$. Dit ondersteunt de berekening bij $x = 4$. De geldige herschrijfstappen leveren het bewijs voor alle x.

Voorbeeld 4.1B

Een oppervlakte als product

Dit oefenmodel is fictief en samengesteld voor deze oefening. Een bouwer gebruikt voor een rechthoek de oppervlakteformule $S = 6a^2 + 9ab$. Hierin zijn a en b positieve lengtes in dm; S is in dm^2.

a Schrijf S als een product van twee lengtes. Bereken daarna de oppervlakte bij $a = 2$ en $b = 4$.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een productvorm voor S en de bijbehorende oppervlakte bij de gegeven lengtes.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de distributieve eigenschap in de terugrichting. Beide termen bevatten 3a, dus die gemeenschappelijke factor kan een lengte van de rechthoek voorstellen.

3. Berekening

$6a^2 + 9ab = 3a(2a + 3b)$, omdat $3a \times 2a = 6a^2$ en $3a \times 3b = 9ab$. Bij $a = 2$ en $b = 4$ is $S = 3 \times 2 \times (2 \times 2 + 3 \times 4) = 6 \times 16 = 96$.

4. Antwoord in context

Een mogelijke productvorm is $S = 3a(2a + 3b)$. De bijbehorende lengtes zijn 3a dm en $2a + 3b$ dm. Voor de gegeven waarden is de oppervlakte 96 dm^2.

5. Controle

Uitvermenigvuldigen geeft weer $6a^2 + 9ab$ en bewijst de equivalentie. Invullen in de oorspronkelijke vorm geeft $6 \times 2^2 + 9 \times 2 \times 4 = 24 + 72 = 96$ dm^2; de twee controles passen bij elkaar.

Voorbeeld 4.2A

Een factor uit beide delen

In een algebraïsch model staat de breuk $\frac{3t^2 - 12t}{6t - 24}$.

a Herleid de breuk en vermeld welke waarde van t niet toegestaan is.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een eenvoudiger vorm die op hetzelfde toegestane domein dezelfde waarde heeft.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik zoek gemeenschappelijke factoren. Wegstrepen mag alleen bij factoren van de hele teller en noemer. Daarom ontbind ik beide delen in producten en controleer ik de oorspronkelijke noemer.

3. Berekening

$3t^2 - 12t = 3t(t - 4)$ en $6t - 24 = 6(t - 4)$. De noemer is nul bij $t = 4$. Voor $t \neq 4$ geldt $\frac{3t(t - 4)}{6(t - 4)} = \frac{t}{2}$.

4. Antwoord in context

De breuk in het model is $\frac{t}{2}$ voor $t \neq 4$. Er zijn hier geen eenheden; $t = 4$ blijft uitgesloten.

5. Controle

Bij $t = 6$ geeft de oorspronkelijke breuk $\frac{108 - 72}{36 - 24} = 3$. De herleide vorm geeft ook 3. Bij $t = 0$ zijn beide vormen 0; een nul in de teller is toegestaan. Bij $t = 4$ mag ik de oorspronkelijke breuk niet uitrekenen.

Voorbeeld 4.2B

Eerst aftrekken, dan delen

Een algebraïsch model gebruikt $A(p) = \frac{3}{p-2} - \frac{1}{p}$ en $B(p) = \frac{p+1}{p(p-2)}$.

a Schrijf A(p) als één breuk en vermeld de voorwaarden.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek één gelijkwaardige breuk voor het verschil A(p).

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik kies p(p − 2) als gemeenschappelijke noemer: daarin zitten beide oorspronkelijke noemers als factor. Bij aftrekken houd ik de tweede teller tussen haakjes.

3. Berekening

Voor $p \neq 0$ en $p \neq 2$ geldt $A(p) = \frac{3p-(p-2)}{p(p-2)} = \frac{2p+2}{p(p-2)} = \frac{2(p+1)}{p(p-2)}$.

4. Antwoord in context

In dit model is $A(p) = \frac{2(p+1)}{p(p-2)}$ voor $p \neq 0$ en $p \neq 2$.

5. Controle

Bij p = 3 is het oorspronkelijke verschil $3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. De herleide breuk geeft $\frac{2 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8}{3}$. De twee oorspronkelijke noemers zijn dan niet nul.

Voorbeeld 4.2B

Eerst aftrekken, dan delen

Een algebraïsch model gebruikt $A(p) = \frac{3}{p-2} - \frac{1}{p}$ en $B(p) = \frac{p+1}{p(p-2)}$.

b Herleid $A(p) \div B(p)$ en vermeld alle voorwaarden.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de verhouding $A(p) \div B(p)$, met alle voorwaarden van de oorspronkelijke formules.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de breuk voor A uit a en vermenigvuldig met de omgekeerde breuk van B. Eerst controleer ik de oorspronkelijke noemers én of de deler B nul kan zijn.

3. Berekening

De noemers vereisen $p \neq 0$ en $p \neq 2$. $B(p)$ is nul bij $p = -1$, dus ook $p \neq -1$. Dan geldt $\frac{2(p+1)}{p(p-2)} \times \frac{p(p-2)}{p+1} = 2$.

4. Antwoord in context

De verhouding in het model is 2 voor $p \neq -1$, $p \neq 0$ en $p \neq 2$.

5. Controle

Bij $p = 3$ zijn $A(3) = \frac{8}{3}$ en $B(3) = \frac{4}{3}$, dus hun verhouding is 2. Bij $p = -1$ zijn A en B allebei nul; de verhouding $0 \div 0$ is niet toegestaan, ook al staan er in de herleide uitkomst geen letters meer.

Voorbeeld 4.3A

Oppervlakte van een decoronderdeel

Voor deze oefening is een model samengesteld: $A = \frac{(3x^2)^2}{3x}$, met $x > 0$ een dimensieloze instelling en A de oppervlakte in cm^2.

a Herleid de formule voor A.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek dezelfde formule in een eenvoudiger vorm en houd $x > 0$ aan.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De basis van de buitenste macht is $3x^2$. Ik werk die hele basis uit en deel daarna gelijke grondtallen, omdat het om een product en een quotiënt gaat.

3. Berekening

$(3x^2)^2 = 9x^4$. Daarna $\frac{9x^4}{3x} = 3x^3$.

4. Antwoord in context

Het oppervlaktemodel luidt $A = 3x^3$ cm^2 voor $x > 0$.

5. Controle

De oorspronkelijke noemer $3x$ is niet 0. Ter controle bij $x = 1$: beide vormen geven 3 cm^2. Deze invulcontrole is geen algemeen bewijs; de machtsregels onderbouwen de herleiding.

Voorbeeld 4.3A

Oppervlakte van een decoronderdeel

Voor deze oefening is een model samengesteld: $A = \frac{(3x^2)^2}{3x}$, met $x > 0$ een dimensieloze instelling en A de oppervlakte in cm^2.

b Bereken A bij $x = 2$ en controleer met de oorspronkelijke formule.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een oppervlakte in cm^2 bij de toegestane instelling $x = 2$.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik kies de herleide formule $A = 3x^3$ voor een korte berekening. Daarna vul ik dezelfde waarde in de oorspronkelijke breuk in als controle.

3. Berekening

$A = 3 \times 2^3 = 24$. Rechtstreeks: $\frac{(3 \times 2^2)^2}{3 \times 2} = \frac{144}{6} = 24$.

4. Antwoord in context

De oppervlakte is 24 cm^2.

5. Controle

Beide berekeningen geven 24 cm^2; de noemer is 6 en niet 0. Een positieve oppervlakte past bij het model.

Voorbeeld 4.3B

Een lengte met een negatieve macht

Voor deze oefening is het model $R = \sqrt{144d^{-2}}$ samengesteld. R is een lengte in cm en $d > 0$ is een dimensieloze instelling.

a Schrijf het model zonder negatieve exponent en herleid de wortel.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een gelijkwaardige formule zonder negatieve exponent en zonder wortel, met het oorspronkelijke domein $d > 0$.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik schrijf eerst d^{-2} als $\frac{1}{d^2}$. Daarna kan ik de wortel van een quotiënt nemen, omdat de teller niet-negatief en de noemer positief is.

3. Berekening

$R = \sqrt{\frac{144}{d^2}} = \frac{12}{|d|} = \frac{12}{d}$, want $d > 0$.

4. Antwoord in context

De formule voor de lengte is $R = \frac{12}{d}$ cm, met $d > 0$.

5. Controle

De noemer is niet 0 en de lengte is positief. Het kwadraat van $\frac{12}{d}$ is $\frac{144}{d^2}$; dat is de wortelinhoud. De niet-negatieve waarde is dus de bedoelde wortel.

Voorbeeld 4.3B

Een lengte met een negatieve macht

Voor deze oefening is het model $R = \sqrt{144d^{-2}}$ samengesteld. R is een lengte in cm en $d > 0$ is een dimensieloze instelling.

b Bereken R bij $d = 3$ en controleer met de oorspronkelijke formule.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de lengte in cm bij $d = 3$.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De formule $R = \frac{12}{d}$ maakt invullen direct. Ik controleer met de oorspronkelijke negatieve macht en wortel.

3. Berekening

$R = 12 \div 3 = 4$. Oorspronkelijk: $3^{-2} = \frac{1}{9}$, dus $R = \sqrt{144 \times \frac{1}{9}} = \sqrt{16} = 4$.

4. Antwoord in context

De lengte is 4 cm.

5. Controle

De instelling 3 is positief, de oorspronkelijke wortelinhoud 16 is niet-negatief en beide formules geven dezelfde positieve lengte. Deze controle betreft $d = 3$.

Voorbeeld 4.4A

Een materiaalstrook

Een voor deze oefening samengesteld ontwerp gebruikt lengten x en y in centimeter met 3x + 2y = 48. Beide lengten moeten positief zijn.

a Maak y vrij. Bereken daarna y bij x = 10 en controleer de nieuwe formule.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een formule waarin y alleen staat, zodat ik y uit elke toegestane x kan berekenen.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik dezelfde bewerking aan beide kanten. Eerst verdwijnt de term 3x; daarna deel ik door 2. Dit kan omdat 2 niet nul is.

3. Berekening

$2y = 48 - 3x$, dus $y = \frac{48 - 3x}{2} = -\frac{3}{2}x + 24$. Bij $x = 10$ is $y = -15 + 24 = 9$.

4. Antwoord in context

De tweede lengte is 9 centimeter. In dit ontwerp zijn x = 10 en y = 9 allebei positief. Voor een algemene bruikbare x geldt $0 < x < 16$.

5. Controle

Getallencontrole: $3 \times 10 + 2 \times 9 = 48$. Algemene terugsubstitutie: $3x + 2(-\frac{3}{2}x + 24) = 3x - 3x + 48 = 48$. Die algemene controle geldt voor elke x; de context beperkt de bruikbare lengten.

Voorbeeld 4.4B

Twee watertoevoeren

Een voor deze oefening samengesteld vat bevat 96 liter. Twee toevoeren leveren samen $v + 2$ liter per minuut; v is de instelbare extra toevoer en $v \geq 0$. De vultijd t in minuten is $t = \frac{96}{v + 2}$.

a Maak v vrij en bereken v als het vullen 12 minuten duurt. Geef de toegestane vultijden.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de extra toevoer v als de vultijd t bekend is.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De gezochte letter staat in de noemer. Ik vermenigvuldig met de hele noemer $v + 2$ en deel daarna door t. Oorspronkelijk is $v + 2$ minstens 2 en dus niet nul; omdat het volume positief is, is ook t positief.

3. Berekening

$t(v + 2) = 96$, dus $v + 2 = \frac{96}{t}$ en $v = \frac{96}{t} - 2$. Bij $t = 12$ is $v = 8 - 2 = 6$.

4. Antwoord in context

De extra toevoer is 6 liter per minuut. Omdat $v \geq 0$ is, zijn de bruikbare vultijden $0 < t \leq 48$ minuten. De grens $t = 48$ hoort bij $v = 0$.

5. Controle

Numeriek: $\frac{96}{6 + 2} = 12$ minuten. Algemeen: $\frac{96}{(\frac{96}{t} - 2) + 2} = \frac{96}{\frac{96}{t}} = t$, zolang $t \neq 0$. Voor deze context geldt de sterkere voorwaarde $0 < t \leq 48$.

Voorbeeld 4.4C

Een paneel met een label

Een samengesteld oefenpaneel bestaat uit een vierkant deel met zijde 3r centimeter en een apart label van 12 vierkante centimeter. De totale oppervlakte is $A = 9r^2 + 12$, met $r > 0$.

a Maak r vrij. Bereken r bij A = 93 en controleer welke waarde in dit paneel bruikbaar is.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de positieve maat r bij een totale oppervlakte A.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik maak eerst r^2 vrij. Daarna neem ik de positieve vierkantswortel, omdat r een positieve maat is. De wortelinhoud moet positief zijn; daarom is $A > 12$ nodig.

3. Berekening

$r^2 = \frac{A - 12}{9}$, dus $r = \sqrt{\frac{A - 12}{9}} = \frac{\sqrt{A - 12}}{3}$. Bij A = 93 wordt $r = \frac{\sqrt{81}}{3} = 3$.

4. Antwoord in context

r is 3 centimeter en de zijde van het vierkante deel is 9 centimeter. De waarde −3 heeft hetzelfde kwadraat, maar kan geen positieve maat zijn.

5. Controle

Getallencontrole: $9 \times 3^2 + 12 = 93$ vierkante centimeter. Algemene terugsubstitutie: $9 \times (\frac{\sqrt{A - 12}}{3})^2 + 12 = A - 12 + 12 = A$ voor $A > 12$. Zo controleer ik de nieuwe formule en de gekozen positieve tak.

Voorbeeld 4.5A

Vermogen in een luchtproef

Voor een fictieve luchtproef is het vermogen van een apparaat gemodelleerd met $P = 0{,}5v^2 + 8$. P is in watt en v is de luchtsnelheid in meter per seconde. De factor 0,5 heeft de eenheid watt per kwadraat van een meter per seconde. Tijdens de proef geldt $v = 2 + 0{,}3t$, waarbij t in seconden wordt gemeten en $0 \le t \le 20$. De 2 is in meter per seconde en de 0,3 in meter per seconde per seconde.

a Schrijf P als vereenvoudigde formule van t en bereken het vermogen na 10 seconden.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek een formule met t als enige variabele en daarna P(10) in watt.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik combineer de twee gegeven formules. Omdat v een som is die gekwadrateerd wordt, vervang ik v door de hele som tussen haakjes. Daarna werk ik het kwadraat uit.

3. Berekening

$P = 0{,}5(2 + 0{,}3t)^2 + 8$. Het kwadraat is $4 + 1{,}2t + 0{,}09t^2$. Dus $P = 2 + 0{,}6t + 0{,}045t^2 + 8 = 0{,}045t^2 + 0{,}6t + 10$. Bij $t = 10$ wordt $P = 4{,}5 + 6 + 10 = 20{,}5$.

4. Antwoord in context

$P = 0{,}045t^2 + 0{,}6t + 10$ watt, voor $0 \le t \le 20$. Na 10 seconden is het vermogen 20,5 watt.

5. Controle

De tijd 10 ligt in het domein. Via de oorspronkelijke formules is $v = 2 + 0{,}3 \times 10 = 5$ meter per seconde en $P = 0{,}5 \times 5^2 + 8 = 20{,}5$ watt. De opgegeven eenheid van de factor 0,5 zorgt ervoor dat de kwadratische term, net als de constante 8, in watt is.

Voorbeeld 4.5B

Materiaal voor displays

Een werkplaats maakt een bestelling van n kartonnen displays. Voor deze oefening zijn de gegevens samengesteld. De materiaalbehoefte zonder afval is $m = 0{,}06n + 0{,}4$ kg: 0,06 kg per display en 0,4 kg voor een proefdruk per bestelling. Karton kost 9 euro per kg. De overige kosten zijn 18 euro voorbereiding en 0,25 euro afwerking per display. Er geldt $1 \leq n \leq 80$ en n is een geheel getal. Er zijn geen andere kosten.

a Stel een vereenvoudigde formule op voor de totale kosten C.

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de totale kosten in euro bij n displays.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik tel voorbereiding, materiaal en afwerking op. De materiaalprijs is een tarief per kg, dus ik vermenigvuldig die met de hele materiaalbehoefte. Ik gebruik n als geheel aantal bestelde displays.

3. Berekening

$C = 18 + 9(0{,}06n + 0{,}4) + 0{,}25n = 18 + 0{,}54n + 3{,}6 + 0{,}25n = 21{,}6 + 0{,}79n$.

4. Antwoord in context

De bestelling kost $C = 21{,}6 + 0{,}79n$ euro, voor gehele n van 1 tot en met 80.

5. Controle

Voor $n = 10$ is $m = 1$ kg. Rechtstreeks kosten voorbereiding, karton en afwerking $18 + 9 + 2{,}5 = 29{,}5$ euro. De formule geeft $21{,}6 + 7{,}9 = 29{,}5$ euro. Het product van euro per kg en kg is euro.

Voorbeeld 4.5B

Materiaal voor displays

Een werkplaats maakt een bestelling van n kartonnen displays. Voor deze oefening zijn de gegevens samengesteld. De materiaalbehoefte zonder afval is m = 0,06n + 0,4 kg: 0,06 kg per display en 0,4 kg voor een proefdruk per bestelling. Karton kost 9 euro per kg. De overige kosten zijn 18 euro voorbereiding en 0,25 euro afwerking per display. Er geldt $1 \leq n \leq 80$ en n is een geheel getal. Er zijn geen andere kosten.

b Een nieuwe werkwijze vraagt 10% extra karton bovenop de hele oorspronkelijke materiaalbehoefte, inclusief de proefdruk. De kartonprijs wordt 11 euro per kg. Voorbereiding en afwerking blijven gelijk. Stel de nieuwe kostenformule N op en controleer de formule bij 10 displays. Mag n = 0 in dit model worden gebruikt?

1. Wat zoek ik?

Ik zoek de nieuwe totale kostenformule, een controle bij tien displays en de geldigheid van nul als invoer.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De extra 10% geldt voor de hele materiaalhoeveelheid. Daarom wordt die 1,10(0,06n + 0,4). Ik vermenigvuldig die nieuwe hoeveelheid met de nieuwe kilogramprijs 11 en laat de andere kosten staan.

3. Berekening

$N = 18 + 11 \times 1{,}10(0{,}06n + 0{,}4) + 0{,}25n = 18 + 0{,}726n + 4{,}84 + 0{,}25n = 22{,}84 + 0{,}976n$. Bij n = 10 geeft dit 22,84 + 9,76 = 32,60 euro.

4. Antwoord in context

De nieuwe kosten zijn $N = 22{,}84 + 0{,}976n$ euro voor gehele n van 1 tot en met 80. Voor tien displays wordt 32,60 euro betaald. Nul displays valt buiten het afgesproken domein.

5. Controle

Tien displays vroegen oorspronkelijk 1 kg karton; nu is dat 1,10 kg. Rechtstreeks volgt $18 + 11 \times 1{,}10 + 0{,}25 \times 10 = 32{,}60$ euro. Alle opgetelde kosten hebben de eenheid euro. Bij n = 0 is de algebraïsche uitkomst 22,84, maar de context beschrijft alleen een bestelling van minstens één display; die uitkomst is daarom geen prijs voor een nulbestelling.