Uitwerkingen · Wat weet je nog?

1 Aantallen samenvoegen

a De eerste 3 dozen bevatten $3 \times 8 = 24$ fiches.

De andere 2 dozen bevatten $2 \times 5 = 10$ fiches.

Samen zijn dat $24 + 10 = 34$ fiches.

Antwoord Er zijn 34 fiches.

Alternatief: Tel $8 + 8 + 8 + 5 + 5 = 34$.

b Het rek heeft $6 \times 7 = 42$ vakken.

Van die 42 vakken zijn er 9 bezet: $42 - 9 = 33$.

Antwoord Er zijn 33 lege vakken.

Alternatief: Er zijn $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$ vakken; daarvan zijn er 33 leeg.

2 Wat is één mogelijkheid?

Ontwerp	Vorm	Kleur
1	driehoek	blauw
2	vierkant	rood
3	driehoek	rood
4	cirkel	rood

a Lees in elke rij de kleur.

De ontwerpen 2, 3 en 4 zijn rood.

Antwoord Er zijn 3 rode ontwerpen.

b Bij een compleet ontwerp horen zowel de vorm als de kleur.

Ontwerp 1 heeft een blauwe driehoek; ontwerp 3 heeft een rode driehoek. De kleuren verschillen.

Ook de overige rijen verschillen van elkaar in vorm of kleur.

Antwoord Noor heeft geen gelijk. De tabel bevat 4 verschillende complete ontwerpen.

3 Rekenen en beschikbare labels

a Op de kaarten staan 12 × 3 = 36 opdrachten.

Met de 5 losse opdrachten zijn dat 36 + 5 = 41 opdrachten.

Antwoord Er liggen 41 opdrachten klaar.

Alternatief: Drie groepen van 12 geven 12 + 12 + 12 = 36; 36 + 5 = 41.

b Schrap A1 en B2 uit de gegeven lijst.

De overgebleven labels zijn A2, B1, C1 en C2.

Antwoord Er zijn 4 labels beschikbaar: A2, B1, C1 en C2.

Alternatief: Van de 6 verschillende labels zijn er 2 gebruikt: 6 – 2 = 4.

4 Een voorraad aflezen

Kleur	Aantal enveloppen
Groen	4
Oranje	6
Blauw	5

a Lees de drie aantallen af: 4, 6 en 5.

4 + 6 + 5 = 15.

Antwoord Er liggen 15 enveloppen in de bak.

b Eén bak bevat 15 enveloppen.

2 × 15 = 30.

Antwoord De twee bakken bevatten samen 30 enveloppen.

Alternatief: Optellen geeft hetzelfde: 15 + 15 = 30.

5 Letters vergelijken

Kaartje	Code
1	AA
2	AB
3	BA
4	BB

a AB bevat één A en één B. BA bevat ook één A en één B.

AA bevat twee letters A; BB bevat geen A.

Antwoord AB en BA voldoen; dat zijn 2 codes.

b AB wordt BA en BA wordt AB.

AA en BB blijven gelijk.

Antwoord De codes AB en BA worden anders.

Uitwerkingen

Paragraaf 5.1 · opgaven 1–16

Volledig en zonder dubbeltelling

1 Eindtakken bewaren

a Kies eerst de linkerletter: P, Q of R.

Na iedere eerste letter zijn de twee andere letters voor rechts beschikbaar.

De zes eindtakken staan in de tabel. Iedere toegestane eerste keuze heeft al haar tweede keuzes gekregen.

Antwoord Er zijn 6 mogelijkheden.

Links	Rechts	Eindtak
P	Q	PQ
P	R	PR
Q	P	QP
Q	R	QR
R	P	RP
R	Q	RQ

b De linker- en rechterpositie hebben elk een eigen plaats.

Bij PQ staat P links; bij QP staat P rechts. Dat levert een ander decorstuk op.

Antwoord Je mag deze drie mogelijkheden niet schrappen: bij deze opdracht telt de volgorde mee.

c Bij P links passen nu P, Q en R rechts. Hetzelfde geldt na Q en na R.

De lijst is PP, PQ, PR, QP, QQ, QR, RP, RQ en RR.

De drie groepen hebben elk 3 mogelijkheden: 3 + 3 + 3 = 9.

Antwoord Met herhaling zijn er 9 mogelijkheden.

2 Oplopende nummerkaart

a Met 2 boven zijn 4, 7 en 9 onder mogelijk.

Met 4 boven zijn 7 en 9 onder mogelijk. Met 7 boven kan alleen 9 onder. Met 9 boven kan niets.

De lijst is (2, 4), (2, 7), (2, 9), (4, 7), (4, 9) en (7, 9).

Antwoord Er zijn 6 toegestane kaarten.

Boven	Toegestane getallen onder	Aantal
2	4, 7 en 9	3
4	7 en 9	2
7	9	1
9	geen	0

b Zonder voorwaarde zijn er $4 \times 4 = 16$ kaarten.

De 4 gelijke kaarten vallen af.

Er zijn 6 aflopende kaarten: bij iedere toegestane kaart uit a hoort precies één omgekeerde kaart.

Er vallen dus $4 + 6 = 10$ kaarten af en $16 - 10 = 6$ blijven over.

Antwoord Er vallen 10 kaarten af. De controle geeft opnieuw 6 toegestane kaarten.

Alternatief: Tel de afvallers per bovenste getal: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

c Verschillende getallen zijn niet voldoende: het bovenste getal moet ook kleiner zijn.

Na 2, 4, 7 en 9 zijn respectievelijk 3, 2, 1 en 0 getallen toegestaan. Dat zijn geen vier groepen van 3.

Daarom tel je $3 + 2 + 1 + 0 = 6$.

Antwoord Daan vergeet de eis “boven kleiner dan onder”; 4×3 telt ook de 6 aflopende kaarten mee.

3 Een keuzerooster aanpassen

a Een vak in het rooster staat voor precies één model-kleurcombinatie.

Bij M zijn blauw en wit niet toegestaan. Bij T is groen niet toegestaan.

De aantallen per rij zijn 3, 1, 3 en 2. Hun som is 9.

Antwoord Er zijn 9 verschillende houders mogelijk.

Model	Groen	Blauw	Wit
K	ja	ja	ja
M	ja	nee	nee
P	ja	ja	ja
T	nee	ja	ja

b Zonder beperkingen zijn er $4 \times 3 = 12$ combinaties.

Verboden zijn M-blauw, M-wit en T-groen. Dit zijn drie verschillende combinaties.

Er blijven $12 - 3 = 9$ combinaties over.

Antwoord De tweede telling bevestigt 9 mogelijke houders.

c T had eerst 2 kleuren en heeft er na de wijziging nog steeds 2. De andere rijen blijven gelijk.

Daarom blijft het aantal $3 + 1 + 3 + 2 = 9$.

T-blauw vervalt en T-groen komt erbij.

Antwoord Het aantal blijft 9, maar de verzameling mogelijke houders verandert.

Opeenvolgende keuzes vermenigvuldigen

4 Van keuzes naar een product

a Er zijn 3 onderwerpen. Na ieder onderwerp zijn er 4 tijdvakken.

Na iedere combinatie van onderwerp en tijdvak zijn er 2 ruimtes.

Het aantal volledige inschrijvingen is $3 \times 4 \times 2 = 24$.

Antwoord Er zijn 24 inschrijvingen mogelijk, omdat bij elke voorafgaande keuze dezelfde aantallen vervolgkeuzes beschikbaar zijn.

Alternatief: Ieder onderwerp geeft $4 \times 2 = 8$ inschrijvingen; $8 + 8 + 8 = 24$.

4 Van keuzes naar een product (vervolg)

b Alleen water-T4-E en water-T4-F vervallen.

Er vallen $1 \times 1 \times 2 = 2$ inschrijvingen af.

Er blijven $24 - 2 = 22$ inschrijvingen over.

Antwoord Met deze beperking zijn er 22 inschrijvingen mogelijk.

c Lucht geeft $4 \times 2 = 8$ inschrijvingen.

Water geeft $3 \times 2 = 6$ inschrijvingen.

Licht geeft $4 \times 2 = 8$ inschrijvingen.

Samen zijn dat $8 + 6 + 8 = 22$ inschrijvingen.

Antwoord De tweede aanpak bevestigt 22 mogelijke inschrijvingen.

5 Meer keuzes, hoeveel meer?

a Na iedere beginwereld zijn 3 missies beschikbaar en na ieder begin met missie zijn 5 eindes beschikbaar.

Het aantal is $4 \times 3 \times 5 = 60$.

Ieder verhaal heeft precies één beginwereld, één missie en één einde; het hoort daardoor bij precies één keuzeroute.

Antwoord Er zijn 60 volledige verhalen.

b Het nieuwe totaal is $5 \times 3 \times 6 = 90$.

De toename is $90 - 60 = 30$.

Ravi telt alleen verhalen die tegelijk de nieuwe beginwereld en het nieuwe einde hebben. Hij mist verhalen met slechts één van die twee nieuwe onderdelen.

Antwoord Er komen 30 verhalen bij.

Alternatief: De nieuwe beginwereld geeft $3 \times 6 = 18$ verhalen. Het nieuwe einde geeft bij de 4 oude beginwerelden nog $4 \times 3 = 12$ verhalen. Samen 30, zonder dubbeltelling.

c Een extra beginwereld geeft $5 \times 3 \times 5 = 75$ verhalen.

Een extra missie geeft $4 \times 4 \times 5 = 80$ verhalen.

Een extra einde geeft $4 \times 3 \times 6 = 72$ verhalen.

Antwoord Alleen het toevoegen van één missie levert minstens 80 verhalen op: precies 80.

6 Een begrensde ontwerpcatalogus

a De vier factoren horen bij vorm, maat, kleur en bevestiging.

Het aantal volledige labels is $3 \times 2 \times 4 \times 2 = 48$.

Iedere combinatie krijgt één regel en alle combinaties zijn uitvoerbaar.

Antwoord De catalogus heeft 48 regels nodig.

Alternatief: Per vorm zijn $2 \times 4 \times 2 = 16$ labels mogelijk; drie vormen geven 48 labels.

b Zonder tekst is ook één mogelijkheid. Er zijn dus $1 + 5 = 6$ tekstkeuzes.

Bij ieder van de 48 labels zijn alle 6 tekstkeuzes mogelijk.

Er zijn $48 \times 6 = 288$ volledige ontwerpen.

Antwoord Er zijn 288 catalogusregels nodig.

Alternatief: 48 regels zonder tekst plus 5×48 regels met tekst geeft 288.

c Met 3 teksten en de keuze zonder tekst zijn er 4 tekstkeuzes.

Dat geeft $48 \times 4 = 192$ regels, en 192 is hoogstens 220.

Met 4 teksten en de keuze zonder tekst worden het $48 \times 5 = 240$ regels. Dat is meer dan 220.

Antwoord Je kunt maximaal 3 van de 5 teksten behouden.

Alternatief: Er passen vier volledige groepen van 48 regels: $4 \times 48 = 192$ en $5 \times 48 = 240$. Eén groep is nodig voor ontwerpen zonder tekst.

Blijft een keuze beschikbaar?

7 Een letter opnieuw gebruiken

a Links zijn er 4 keuzes.

Omdat herhaling is toegestaan, blijven er in het midden en rechts telkens 4 keuzes.

Het aantal is $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Antwoord Met herhaling zijn 64 borden mogelijk.

b Links zijn er 4 keuzes.

In het midden zijn de 3 niet gebruikte letters mogelijk.

Rechts zijn de 2 nog niet gebruikte letters mogelijk.

Het aantal is $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Antwoord Zonder herhaling zijn 24 borden mogelijk.

7 Een letter opnieuw gebruiken (vervolg)

c Na J en K zijn L en N nog beschikbaar.

Er zijn rechts dus 2 keuzes, niet 3. Dit geldt na elk paar verschillende eerste letters.

Antwoord De laatste factor moet 2 worden. De juiste telling is $4 \times 3 \times 2 = 24$.

8 Posities en herhaling

a Op de eerste positie zijn 6 labels beschikbaar.

Op de tweede en derde positie blijven respectievelijk 5 en 4 ongebruikte labels over.

Het aantal is $6 \times 5 \times 4 = 120$.

Antwoord Er zijn 120 signalen met drie verschillende labels.

b De eerste positie geeft één keuze, namelijk R.

De tweede positie mag een van de 5 andere labels zijn. Voor de derde blijven daarna 4 labels over.

Het aantal is $1 \times 5 \times 4 = 20$.

Antwoord Er blijven 20 signalen mogelijk.

Alternatief: In a heeft elk van de 6 mogelijke eerste labels een even grote groep; $120 \div 6 = 20$.

c Kies het eerste label op 6 manieren.

Het tweede label heeft 6 keuzes en mag ook gelijk zijn aan het eerste.

Het derde label ligt daarna vast door de eis dat het gelijk is aan het eerste.

Het aantal is $6 \times 6 \times 1 = 36$.

Antwoord Er zijn 36 signalen mogelijk.

Alternatief: Per gekozen eerste label zijn er 6 signalen, dus zes groepen van zes.

9 Verschillende rollen

a Er zijn 7 keuzes voor de leider.

Daarna blijven 6 andere personen voor de controleur over.

Het aantal is $7 \times 6 = 42$.

Antwoord Er zijn 42 rolverdelingen mogelijk.

9 Verschillende rollen (vervolg)

b Er zijn 3 keuzes voor de leider.

Na elke leider blijven alle 6 andere vrijwilligers als mogelijke controleur over; daar zitten ook opgeleide vrijwilligers bij.

Het aantal is $3 \times 6 = 18$.

Antwoord Er zijn 18 rolverdelingen mogelijk.

Alternatief: Elk van de 3 mogelijke leiders heeft een groep van 6 controleurs: $6 + 6 + 6 = 18$.

c De eerste twee factoren zijn goed: 3 opgeleide leiders en daarna 6 andere controleurs.

Na de keuze van leider en controleur zijn twee personen al bezet. Er blijven 5 personen voor de schrijver over.

Het juiste aantal is $3 \times 6 \times 5 = 90$.

Antwoord De laatste factor moet 5 zijn. Er zijn 90 rolverdelingen met drie verschillende personen.

Alternatief: De 18 verdelingen uit b kunnen elk op 5 manieren met een schrijver worden aangevuld: $18 \times 5 = 90$.

Beperkingen verwerken en controleren

10 Een beperking meteen verwerken

a Voor het eerste cijfer zijn er 3 keuzes: 2, 5 en 8.

Na elk eerste cijfer zijn er precies 3 andere cijfers over voor de tweede positie. Welke drie dat zijn, kan verschillen.

Het aantal is $3 \times 3 = 9$.

Antwoord Er zijn 9 codes. Vermenigvuldigen kan hier omdat iedere eerste keuze precies 3 vervolgkeuzes heeft.

Alternatief: Zonder de eis van verschillende cijfers zijn er $3 \times 4 = 12$ codes. De codes 22, 55 en 88 vallen af: $12 - 3 = 9$.

b De codes die met 2 beginnen zijn 20, 25 en 28.

De codes die met 5 beginnen zijn 50, 52 en 58.

De codes die met 8 beginnen zijn 80, 82 en 85.

Antwoord De volledige lijst bevat opnieuw 9 codes.

10 Een beperking meteen verwerken (vervolg)

c Er vervallen 20, 50 en 80. Dus 9 − 3 = 6 codes blijven over.

Met alleen 2, 5 en 8 zijn er eerst 3 × 3 = 9 codes. De 3 gelijke codes zijn niet toegestaan, dus 9 − 3 = 6.

Antwoord Er blijven 6 codes over. Beide tellingen geven hetzelfde resultaat.

Alternatief: De lijst is 25, 28, 52, 58, 82 en 85.

11 Het aantal is gelijk, de keuzes niet

a Omslag A kan Y of Z krijgen. Omslag B, C en D kunnen elk X of Y krijgen.

Er zijn 2 + 2 + 2 + 2 = 8 pakketten.

Zonder beperkingen zijn er 4 × 3 = 12 pakketten. A-X, B-Z, C-Z en D-Z zijn verboden: 12 − 4 = 8.

Antwoord Er zijn 8 pakketten. De tweede telling bevestigt dit.

Omslag	Toegestane labels
A	Y en Z
B	X en Y
C	X en Y
D	X en Y

b Het product 4 × 2 = 8 klopt: iedere omslag heeft precies 2 toegestane labels.

De labels zijn niet overal dezelfde. A heeft Y en Z; de andere omslagen hebben X en Y.

Gelijke aantallen vervolgkeuzes zijn genoeg voor dit product. Dat betekent niet dat de vervolgkeuzes zelf gelijk zijn.

Antwoord De telling klopt, maar de conclusie over dezelfde labels klopt niet.

12 Buren en verre posities

a Links zijn er 3 keuzes.

Het midden moet van links verschillen: 2 keuzes.

Rechts moet alleen van het midden verschillen: 2 keuzes. Rechts mag dus gelijk zijn aan links.

Het aantal is $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Antwoord Er zijn 12 ornamenten mogelijk.

Alternatief: Met A links zijn ABA, ABC, ACA en ACB mogelijk. Met B en C links ontstaan elk ook 4 mogelijkheden: $4 + 4 + 4 = 12$.

b Links en midden houden 3 en 2 keuzes.

Rechts mag geen van de twee al gebruikte kleuren hebben. Van de 3 kleuren blijft 1 kleur over.

Het aantal is $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Antwoord Er blijven 6 ornamenten over; de laatste keuzestap verandert van 2 naar 1.

Alternatief: De 6 zijn ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA.

c Links heeft 3 keuzes, het midden 3 en rechts 2 keuzes omdat het alleen van links moet verschillen.

Het aantal is $3 \times 3 \times 2 = 18$.

Bij a waren er 12. Nu geldt een andere eis: het midden mag gelijk zijn aan een buur, terwijl links en rechts niet gelijk mogen zijn.

Antwoord Er zijn 18 ornamenten, dus 6 meer dan bij a. De toegestane verzameling verandert doordat de beperking op andere posities geldt.

Alternatief: Tel eerst $3 \times 2 = 6$ verschillende paren voor links en rechts; ieder paar heeft 3 middenkleuren, dus 18.

13 Waar gaat de telling mis?

a De beperking op T3 en T4 geldt alleen voor pakket N.

Pakket U heeft $4 \times 2 = 8$ mogelijkheden, pakket N heeft $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden.

Samen zijn dat $8 + 4 = 12$ mogelijkheden.

Antwoord Mila sluit ook toegestane keuzes voor U uit. Het juiste aantal is 12.

13 Waar gaat de telling mis? (vervolg)

b Ieder verboden tijdvak bij N hoort bij 2 mogelijke balies.

Er zijn dus $1 \times 2 \times 2 = 4$ verboden volledige mogelijkheden.

De verbeterde berekening is $16 - 4 = 12$.

Antwoord Bo telt niet alle baliekeuzes mee bij de verboden gevallen. Ook de verbeterde telling geeft 12.

c Voor U zijn de 3 tijdvakken elk met E en F mogelijk.

Voor N zijn alleen T1 en T2 elk met E en F mogelijk.

De tabel bevat $6 + 4 = 10$ eindtakken.

Antwoord In de kleinere situatie zijn 10 mogelijkheden.

Pakket	Tijdvak	Balie
U	T1	E
U	T1	F
U	T2	E
U	T2	F
U	T3	E
U	T3	F
N	T1	E
N	T1	F
N	T2	E
N	T2	F

14 Zelftest: signaalvenster

a Met C links: CR, CK en CS.

Met R links: RC, RK en RS.

Met K links: KC, KR en KS. Met S links: SC, SR en SK.

Er zijn $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ signalen.

Antwoord De volledige lijst bevat 12 signalen.

Alternatief: Een volledig rooster met de 4 gelijke paren uitgesloten is ook goed.

14 Zelftest: signaalvenster (vervolg)

b Beide posities hebben 4 keuzes: $4 \times 4 = 16$.

Vergeleken met a komen CC, RR, KK en SS erbij.

Antwoord Er zijn 16 signalen, dus 4 meer dan bij a.

Alternatief: $12 + 4 = 16$.

c Links zijn er 4 keuzes.

In het midden zijn nog 3 tekens en rechts nog 2 tekens beschikbaar.

Het aantal is $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Antwoord Er zijn 24 signalen met drie verschillende tekens.

Alternatief: Elk van de 12 verschillende eerste paren uit a kan met 2 ongebruikte tekens worden aangevuld: $12 \times 2 = 24$.

15 Zelftest: routepakketten

a Elke startplek heeft 5 tussenstops en elke combinatie daarvan heeft 2 eindmarkeringen.

Het aantal is $3 \times 5 \times 2 = 30$.

Antwoord Er zijn 30 routepakketten mogelijk; elke voorafgaande keuze heeft hetzelfde aantal vervolgkeuzes.

b Er zijn $1 \times 2 \times 2 = 4$ verboden routepakketten: haven met een van de twee verboden stops en een van de twee eindmarkeringen.

Van de 30 pakketten blijven er $30 - 4 = 26$ over.

Antwoord Er blijven 26 routepakketten mogelijk.

Alternatief: Haven geeft $3 \times 2 = 6$ pakketten, park en plein elk $5 \times 2 = 10$. Samen 26.

c Tel per startplek. Haven heeft $3 \times 2 = 6$ mogelijkheden, park $5 \times 2 = 10$ en plein $5 \times 2 = 10$.

Deze groepen zijn gescheiden doordat hun startplekken verschillen. Elk toegestaan pakket hoort bij één van deze drie startplekken.

Er zijn $6 + 10 + 10 = 26$ mogelijkheden.

Antwoord De tweede telling bevestigt 26 routepakketten, zonder dubbeltelling.

Alternatief: Als b al per startplek is geteld, is $3 \times 5 \times 2 - 1 \times 2 \times 2 = 26$ een goede tweede aanpak.

16 Zelftest: slotcodes

a Het eerste cijfer kan 2, 4 of 6 zijn: 3 keuzes.

Het middelste cijfer heeft 6 keuzes. Voor het laatste cijfer zijn de 5 cijfers ongelijk aan het eerste beschikbaar.

Het aantal is $3 \times 6 \times 5 = 90$.

Antwoord Er zijn 90 codes mogelijk.

Alternatief: Bij elk even eerste cijfer zijn er $6 \times 5 = 30$ codes; drie zulke groepen geven 90.

b Het eerste cijfer heeft opnieuw 3 keuzes.

Het middelste cijfer mag het eerste niet zijn: 5 keuzes.

Het laatste cijfer mag geen van de twee gebruikte cijfers zijn: 4 keuzes.

Het aantal is $3 \times 5 \times 4 = 60$.

Antwoord Er zijn 60 codes mogelijk.

Alternatief: Per even eerste cijfer zijn er $5 \times 4 = 20$ codes; $20 + 20 + 20 = 60$.

Uitwerkingen

Paragraaf 5.2 · opgaven 1–13

Wat betekent een andere volgorde?

1 Drie tegels, verschillende plekken

a In AB staat A op plek 1 en B op plek 2.

In BA staat B op plek 1 en A op plek 2.

De positie van elke tegel is onderdeel van de uitkomst.

Antwoord AB en BA zijn verschillende uitkomsten; de volgorde maakt verschil.

Alternatief: Je kunt de twee opstellingen als plaatsentabel noteren: AB geeft plek 1 = A, plek 2 = B; BA geeft plek 1 = B, plek 2 = A. De tabelrijen zijn verschillend.

b Voor plek 1 zijn er 3 keuzes.

Na die keuze blijven voor plek 2 nog 2 tegels over.

Het aantal is $3 \times 2 = 6$.

Antwoord Er zijn 6 opstellingen van twee tegels.

Alternatief: De volledige lijst is AB, AC, BA, BC, CA en CB: 6 opstellingen.

c Voor de drie plekken zijn achtereenvolgens 3, 2 en 1 keuzes beschikbaar.

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Antwoord Er zijn 6 volledige opstellingen.

Alternatief: De volledige lijst is ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA: 6 opstellingen.

d B is al gebruikt op plek 1.

Op plekken 2 en 3 komen A en C, in de volgorde AC of CA.

Antwoord De opstellingen zijn BAC en BCA; er zijn 2 mogelijkheden.

Alternatief: De overgebleven plekken hebben 2 en daarna 1 keuze: $2 \times 1 = 2$.

2 Een kijkvolgorde maken

Eerste film	Mogelijke tweede films
A	
B	
C	
D	

a De gekozen groep bevat bij beiden alleen A en C.

De kijkvolgorden zijn AC en CA.

De eerste en tweede positie verschillen.

Antwoord De groep films is gelijk, maar de kijkvolgorde is verschillend.

Alternatief: Als je alleen de gekozen films aanvinkt, krijg je dezelfde twee vinkjes. Als je de plekken 1 en 2 invult, krijg je twee verschillende rijen.

b Na eerste film A zijn B, C en D beschikbaar; na B zijn A, C en D beschikbaar.

Na C zijn A, B en D beschikbaar; na D zijn A, B en C beschikbaar.

Elke rij heeft 3 eindmogelijkheden, dus $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Antwoord Er zijn 12 kijkvolgorden.

Alternatief: Er zijn 4 keuzes voor de eerste film en daarna 3: $4 \times 3 = 12$.

Eerste film	Mogelijke tweede films
A	B, C en D
B	A, C en D
C	A, B en D
D	A, B en C

3 Rollen en een spreekvolgorde

a Voorzitter en notulist zijn twee verschillende functies.

In de eerste verdeling heeft Ina de voorzittersrol; in de tweede heeft Jamal die rol.

Antwoord Het zijn verschillende rolverdelingen; dezelfde personen krijgen andere functies.

Alternatief: De rolparen (voorzitter Ina, notulist Jamal) en (voorzitter Jamal, notulist Ina) zijn verschillend.

3 Rollen en een spreekvolgorde (vervolg)

b Ina bezet de eerste plek en is daarna niet meer beschikbaar.

De overige vier deelnemers vullen de overige vier plekken.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Antwoord Er zijn 24 spreekvolgorden met Ina als eerste.

Alternatief: Voor de tweede plek zijn er 4 keuzes; bij ieder daarvan zijn er $3 \times 2 \times 1 = 6$ vervolgvolgorden. Samen $4 \times 6 = 24$.

c De eerste spreker is Ina of Jamal: twee afzonderlijke gevallen.

In elk geval kunnen de andere vier deelnemers op $4! = 24$ manieren volgen.

$2 \times 24 = 48$.

Antwoord Er zijn 48 spreekvolgorden.

Alternatief: Van de $5! = 120$ volledige volgorden hebben 24 Ina als eerste en 24 Jamal als eerste. Optellen geeft $24 + 24 = 48$.

Iedere keuze verkleint de voorraad

4 Sensoren op vaste kanalen

a Voor kanaal P zijn er 7 sensoren beschikbaar.

Voor Q blijven er 6 over.

$7 \times 6 = 42$.

Antwoord Er zijn 42 toewijzingen.

Alternatief: Voor ieder van de 7 keuzes voor Q zijn er 6 keuzes voor P: $7 \times 6 = 42$.

b De vier aantallen beschikbare sensoren zijn 7, 6, 5 en 4.

$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Antwoord Er zijn 840 toewijzingen.

Alternatief: De eerste twee kanalen hebben 42 toewijzingen. Bij elk daarvan zijn er $5 \times 4 = 20$ toewijzingen voor de laatste twee; $42 \times 20 = 840$.

4 Sensoren op vaste kanalen (vervolg)

c Het eerste kanaal heeft n keuzes.

Na één gebruikte sensor heeft het tweede kanaal n − 1 keuzes.

Na twee gebruikte sensoren heeft het derde kanaal n − 2 keuzes.

Antwoord Het aantal is $n \times (n - 1) \times (n - 2)$.

Alternatief: Vul eerst het derde kanaal, daarna het eerste en dan het tweede. De aantallen zijn ook dan n, n − 1 en n − 2; het product blijft gelijk.

5 Hoeveel plekken zijn gevuld?

Beschikbare notities	Plekken in de lijst	Aantal afleverlijsten
8	1	
8	3	
8	5	

a Voor 1 plek: 8 mogelijkheden.

Voor 3 plekken: $8 \times 7 \times 6 = 336$ mogelijkheden.

Voor 5 plekken: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ mogelijkheden.

Antwoord De aantallen zijn achtereenvolgens 8, 336 en 6720.

Alternatief: De aantallen voor 1 tot en met 5 plekken zijn 8, 56, 336, 1680 en 6720; elke extra plek vermenigvuldigt met het volgende afnemende aantal.

Plekken in de lijst	Telproduct	Aantal afleverlijsten
1	8	8
3	$8 \times 7 \times 6$	336
5	$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$	6720

b Met 1 plek zijn er 8 mogelijkheden; met 2 plekken $8 \times 7 = 56$.

Met 3 plekken zijn er $56 \times 6 = 336$ mogelijkheden.

Met 4 plekken zijn er $336 \times 5 = 1680$ mogelijkheden.

Antwoord De lijst heeft 4 plekken.

Alternatief: Delen verwijdert de gebruikte factoren: $1680 \div 8 = 210$, $210 \div 7 = 30$, $30 \div 6 = 5$ en $5 \div 5 = 1$. Er zijn vier factoren gebruikt.

Alles krijgt een plek

6 Een volledige rij

a Alle 6 werkstukken krijgen een plek.

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Het product is 720.

Antwoord Er zijn 720 volledige opstellingen.

Alternatief: Kies het werkstuk op de laatste plek op 6 manieren. De overige vijf hebben $5! = 120$ volgorden; $6 \times 120 = 720$.

b Er worden nu 5 verschillende werkstukken volledig geordend.

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Antwoord Er zijn 120 opstellingen.

Alternatief: Voor de eerste twee plekken zijn er $5 \times 4 = 20$ keuzes. De laatste drie hebben $3 \times 2 \times 1 = 6$ volgorden; $20 \times 6 = 120$.

c $720 \div 120 = 6$.

Bij elke rij van vijf kan C op zes plekken worden ingevoegd: ervoor, in een van de vier tussenruimten of erachter.

Die zes invoegplekken geven zes verschillende rijen.

Antwoord Het aantal is 6 keer zo groot.

Alternatief: $6! = 6 \times 5!$, dus $6! \div 5! = 6$.

7 Een paneel testen

a De scanner bewaart de volgorde van de labels.

ABCDEFG en BACDEFG bevatten dezelfde paneeltjes, maar beginnen met verschillende labels.

Antwoord De scan hangt af van de posities; verschillende volgorden kunnen verschillende scans opleveren.

Alternatief: Bij ABCDEFG is het eerste gelezen label A; bij BACDEFG is het eerste label B. De twee scans verschillen al bij het eerste label.

7 Een paneel testen (vervolg)

b Alle 7 paneeltjes worden volledig geordend: 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5040.

Het testen duurt 5040 × 3 = 15120 seconden.

15120 ÷ 60 = 252 minuten.

Antwoord Er zijn 5040 rijen; alle tests samen duren 252 minuten.

Alternatief: Per keuze voor het eerste paneeltje zijn er 6! = 720 vervolgvolgorden. 7 × 720 = 5040. Elke rij duurt 3 ÷ 60 = 0,05 minuut; 5040 × 0,05 = 252 minuten.

Begin met de voorwaarde

8 Een vaste middenplek

a C is al gebruikt op plek 2.

Voor plek 1 blijven 5 symbolen over; daarna zijn er 4 voor plek 3.

5 × 4 = 20.

Antwoord Er zijn 20 etiketten.

Alternatief: Kies eerst plek 3 op 5 manieren en daarna plek 1 op 4 manieren: 5 × 4 = 20.

b Plek 3 kan A, B, E of F bevatten: 4 keuzes.

C en het symbool op plek 3 zijn gebruikt; voor plek 1 blijven 4 keuzes over.

4 × 4 = 16.

Antwoord Er zijn 16 etiketten.

Alternatief: Bij a zijn er 20 etiketten. Daarvan hebben 4 een D op plek 3, want plek 1 kan dan A, B, E of F zijn. 20 − 4 = 16.

9 Illustraties op drie schermen

a Voor links zijn er 9 keuzes, voor midden daarna 8 en voor rechts daarna 7.

9 × 8 × 7 = 504.

Antwoord Er zijn 504 schermopstellingen.

Alternatief: Kies eerst de rechter illustratie op 9 manieren; de twee overige plekken hebben 8 × 7 = 56 mogelijkheden. 9 × 56 = 504.

9 Illustraties op drie schermen (vervolg)

b E bezet de middenplek en wordt niet opnieuw gebruikt.

Links en rechts hebben achtereenvolgens 8 en 7 keuzes.

$8 \times 7 = 56$.

Antwoord Er zijn 56 schermopstellingen.

Alternatief: Van de 504 vrije opstellingen heeft elke illustratie even vaak de middenplek. $504 \div 9 = 56$.

c Links heeft 2 keuzes en rechts staat vast op C.

Na het invullen van links en rechts blijven 7 illustraties over voor midden.

$2 \times 7 = 14$.

Antwoord Er zijn 14 schermopstellingen.

Alternatief: Met A links en C rechts zijn er 7 middenkeuzes; met B links en C rechts ook 7. De gevallen verschillen links, dus $7 + 7 = 14$.

10 Voorwaarden aan een wandbord

a Plek 1 heeft 2 keuzes en plek 4 is bezet door D.

Er blijven 5 ontwerpen over voor plek 2 en vervolgens 4 voor plek 3.

$2 \times 5 \times 4 = 40$.

Antwoord Er zijn 40 wandborden.

Alternatief: Met A op plek 1 zijn er $5 \times 4 = 20$ wandborden; met B op plek 1 ook 20. $20 + 20 = 40$.

b Als A op plek 1 staat, hebben de drie andere plekken $6 \times 5 \times 4 = 120$ mogelijkheden.

Als A op plek 4 staat, zijn er eveneens 120 mogelijkheden.

A wordt niet herhaald, dus een wandbord hoort niet bij beide gevallen.

$120 + 120 = 240$.

Antwoord Er zijn 240 wandborden.

Alternatief: Kies voor A een van de 2 toegestane plekken. Vul de overige drie plekken met 6, 5 en 4 keuzes: $2 \times 6 \times 5 \times 4 = 240$.

11 Controleer de redenering

a De twee rollen zijn verschillend.

Bijvoorbeeld: Noor als penningmeester en Sam als secretaris is anders dan Sam als penningmeester en Noor als secretaris.

Antwoord Noor vergeet dat de rolverdeling onderdeel van de uitkomst is.

Alternatief: Een tabel met de kolommen penningmeester en secretaris krijgt bij het omwisselen andere namen per kolom. Het zijn verschillende tabelrijen.

b Dezelfde persoon mag niet nog een tweede rol krijgen.

Na de eerste rol blijven 5 personen over en na de tweede 4.

$6 \times 5 \times 4 = 120$.

Antwoord Het juiste aantal is 120; Ilias telt verdelingen met herhaalde personen mee.

Alternatief: Voor elke van de 6 keuzes voor de eerste rol zijn er $5 \times 4 = 20$ keuzes voor de overige rollen: $6 \times 20 = 120$.

c 5! telt ook rijen waarin het atlasboek niet op plek 3 staat.

Het atlasboek staat al vast; de andere 4 boeken worden volledig geordend.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Antwoord Er zijn 24 toegestane rijen.

Alternatief: In de 120 vrije rijen staat het atlasboek even vaak op elk van de 5 plekken. $120 \div 5 = 24$.

12 Een bewegingsreeks

a De eerste beweging en de tweede beweging wisselen van plaats.

De uitvoerder volgt de genoteerde posities, dus de uitgevoerde volgorde verandert.

Antwoord Het zijn verschillende uitkomsten; de volgorde van de bewegingen telt mee.

Alternatief: De geordende paren (G1, G2) en (G2, G1) hebben een verschillend eerste element.

b De eerste kaart heeft 9 keuzes en de tweede daarna 8.

$9 \times 8 = 72$.

Antwoord Er zijn 72 reeksen van twee kaarten.

Alternatief: Voor iedere laatste kaart zijn er 8 verschillende eerste kaarten: $9 \times 8 = 72$.

12 Een bewegingsreeks (vervolg)

c Alle 9 kaarten worden volledig geordend.

$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$.

Antwoord Er zijn 362880 volledige reeksen.

Alternatief: Voor iedere van de 9 eerste kaarten zijn er $8! = 40320$ volgorden voor de andere kaarten. $9 \times 40320 = 362880$.

d G4 bezet de derde plek en is voor de andere plekken niet meer beschikbaar.

De 8 overige kaarten vullen de 8 overige plekken.

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

Antwoord Er zijn 40320 reeksen met G4 op de derde plek.

Alternatief: In de $9! = 362880$ volledige reeksen bezet G4 ieder van de 9 plekken even vaak. $362880 \div 9 = 40320$.

13 Metalen emblemen

a De vier plekken hebben achtereenvolgens 11, 10, 9 en 8 keuzes.

$11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$.

Antwoord Er zijn 7920 wandborden.

Alternatief: Voor de eerste twee plekken zijn er $11 \times 10 = 110$ keuzes; de laatste twee hebben $9 \times 8 = 72$ mogelijkheden. $110 \times 72 = 7920$.

b De eerste en laatste plek hebben samen $3 \times 2 = 6$ mogelijkheden.

Deze plekken gebruiken twee verschillende emblemen, want de twee genoemde groepen overlappen niet.

Voor plek 2 blijven 9 keuzes over en daarna voor plek 3 nog 8.

$6 \times 9 \times 8 = 432$.

Antwoord Er zijn 432 wandborden.

Alternatief: Er zijn 6 verschillende paren voor plekken 1 en 4: AJ, AK, BJ, BK, CJ en CK. Elk paar laat $9 \times 8 = 72$ middenstukken toe. $72 + 72 + 72 + 72 + 72 + 72 = 432$.

Uitwerkingen

Paragraaf 5.3 · opgaven 1–14

Maakt de volgorde verschil?

1 Een paar of twee plaatsen

a Bij het proefvel blijft dezelfde verzameling van twee stickers over.

Bij de genummerde vakken verandert welke sticker in vak 1 en welke in vak 2 staat.

Antwoord Alleen bij het vel met de genummerde vakken geeft omwisselen een nieuwe mogelijkheid.

b De paren met A zijn AB, AC, AD, AE en AF.

De paren met B zijn BC, BD, BE en BF; met C zijn het CD, CE en CF.

De resterende paren zijn DE, DF en EF.

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

Antwoord Er zijn 15 verschillende paren.

Alternatief: Per eerste letter zijn er 5, 4, 3, 2 en 1 mogelijkheden; optellen geeft 15.

c Voor vak 1 zijn er 6 keuzes, daarna voor vak 2 nog 5.

6 × 5 = 30 geordende invullingen.

Elk paar verschijnt twee keer: bijvoorbeeld AB en BA.

30 ÷ 2 = 15.

Antwoord Er zijn 30 invullingen van de genummerde vakken en 15 paren.

2 Een omslag voorbereiden

a Een verzameling verandert niet als je de drie foto's in een andere volgorde noemt. Daarbij tel je groepen zonder herhaling.

Bij boven, midden en onder verandert het ontwerp wanneer twee foto's van plaats wisselen. Daarbij tel je geordende keuzes zonder herhaling.

Antwoord Het eerste ontwerp vraagt om een groep; het tweede om een geordende selectie.

b Zet B boven: BEH en BHE.

Zet E boven: EBH en EHB.

Zet H boven: HBE en HEB.

Antwoord De zes invullingen zijn BEH, BHE, EBH, EHB, HBE en HEB.

Hoe vaak is dezelfde groep geteld?

3 Een klein proefpakket

a De connector blijft op de eerste positie.

De twee filtervolgorden zijn F2, F4 en F4, F2.

Antwoord De lijsten K, F2, F4 en K, F4, F2 beschrijven hetzelfde pakket.

b Na de keuze van de connector zijn er 4 keuzes voor het eerste filter en 3 voor het tweede.

$3 \times 4 \times 3 = 36$ lijsten.

Bij elk pakket kun je alleen de twee filters van volgorde wisselen; dat geeft 2 lijsten.

$36 \div 2 = 18$.

Antwoord Er zijn 18 verschillende pakketten.

c Vier filters leveren $4 \times 3 \div 2 = 6$ verschillende filterparen.

Bij ieder filterpaar passen alle 3 connectors.

$3 \times 6 = 18$.

Antwoord Er zijn 18 pakketten, omdat ieder van de 6 filterparen met ieder van de 3 connectors gecombineerd kan worden.

Alternatief: Een volledige lijst van de 6 filterparen, elk met 3 connectors, bevat 18 pakketten.

4 Dubbele bundels verwijderen

a Het programma bewaart de volgorde waarin de vier fragmenten gekozen zijn.

Een bundel hangt alleen af van de vier aanwezige fragmenten.

Het omwisselen van de keuzevolgorde levert een ander bestand maar dezelfde bundel op.

Antwoord De programmafiles onderscheiden volgorden die voor een bundel geen verschil maken.

b De vier vast gekozen fragmenten kunnen op 4 manieren op de eerste plaats staan.

Daarna zijn er 3, 2 en 1 mogelijkheden.

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Antwoord Iedere bundel is in 24 bestanden opgeslagen.

Alternatief: Dit aantal is $4! = 24$.

4 Dubbele bundels verwijderen (vervolg)

c Elk van de 1680 bestanden hoort bij één bundel; iedere bundel heeft precies 24 bestanden.

1680 ÷ 24 = 70 verschillende bundels.

1680 − 70 = 1610 overtollige bestanden.

Antwoord Er blijven 70 bestanden over; 1610 bestanden worden verwijderd.

Alternatief: $C(8,4) = \frac{8!}{4!4!} = 70$; vervolgens 1680 − 70 = 1610.

Rekenen met combinaties

5 Vergelijking van panelen

a Voor de vergelijking blijft de keuze gelijk bij omwisselen van de drie ontwerpen: tel combinaties zonder herhaling.

Voor de presentatiewand tellen de posities mee: tel geordende selecties zonder herhaling.

Antwoord Bij de vergelijking horen combinaties; bij de presentatiewand geordende selecties.

b $C(9,3) = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}$.

504 ÷ 6 = 84.

Antwoord Er zijn 84 verschillende vergelijkingen.

Alternatief: $C(9,3) = \frac{9!}{3!6!} = 84$.

c 9 × 8 × 7 = 504.

Een vaste groep van drie ontwerpen kan op 3! = 6 manieren over de posities worden verdeeld.

84 × 6 = 504.

Antwoord Er zijn 504 presentatiewanden; iedere vergelijking levert 6 verschillende wanden.

6 Combinaties vergelijken

a $C(6,2) = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.

$C(6,4) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$.

Bij iedere keuze van 2 hoort precies één overblijvende groep van 4, en andersom.

Antwoord C(6,2) = C(6,4) = 15.

Alternatief: Gebruik C(6,4) = C(6,2) en bereken alleen $\frac{6 \times 5}{2} = 15$.

6 Combinaties vergelijken (vervolg)

b Een groep van één bestaat uit één van de 11 verschillende voorwerpen.

Een groep van nul bevat niets; er is precies één lege groep.

Antwoord $C(11,1) = 11$ en $C(11,0) = 1$.

Alternatief: $C(11,1) = \frac{11!}{1!10!} = 11$ en $C(11,0) = \frac{11!}{0!11!} = 1$, met $0! = 1$.

7 Een kleine expositie

a $C(12,4) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

$11880 \div 24 = 495$.

Antwoord Er zijn 495 keuzes van vier drukken.

Alternatief: $C(12,4) = \frac{12!}{4!8!} = 495$.

b De vier getoonde drukken en de acht thuisblijvende drukken vullen elkaar precies aan.

Iedere keuze van vier heeft één overblijvende groep van acht.

$C(12,8) = C(12,4) = 495$.

Antwoord Er zijn 495 keuzes van acht thuisblijvende drukken.

Alternatief: $C(12,8) = \frac{12!}{8!4!} = 495$.

c De getoonde groep is dan de lege groep.

Er zijn geen verschillende leden om een andere lege groep te maken.

Antwoord Er is 1 keuze: geen enkele druk tonen; $C(12,0) = 1$.

8 Alle materiaalsets testen

a $C(10,4) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

$5040 \div 24 = 210$.

Antwoord Er moeten 210 sets worden getest.

Alternatief: $C(10,4) = \frac{10!}{4!6!} = 210$.

b Er zijn 210 kaarten nodig en 220 kaarten beschikbaar.

$220 - 210 = 10$.

Antwoord Er zijn genoeg testkaarten; er blijven 10 kaarten over.

8 Alle materiaalsets testen (vervolg)

c $C(10,6) = \frac{10!}{6!4!} = 210$.

Bij iedere groep van zes weggelaten kapjes hoort precies één set van de vier overige kapjes.

Antwoord Ook deze telling geeft 210 sets.

Alternatief: Bereken $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$.

9 Twee toegestane groepsgroottes

a $C(7,2) = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$.

$C(7,3) = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$.

$21 + 35 = 56$.

Antwoord Er zijn 56 verschillende bespreekpakketten.

Alternatief: $C(7,2) + C(7,3) = 21 + 35 = 56$.

b Een pakket heeft óf twee óf drie teksten.

De twee groepen mogelijkheden overlappen niet, omdat een pakket niet tegelijk twee en drie teksten kan bevatten.

Vermenigvuldigen zou paren van een tweepakket en een driepakket tellen; dat wordt niet gevraagd.

Antwoord Je telt de aantallen op, omdat het twee verschillende toegestane gevallen zijn.

10 Een verkeerde deler

a De teller onderscheidt de volgorde waarin de drie leden zijn gekozen.

Een vaste groep van drie leden heeft $3 \times 2 \times 1 = 6$ volgorden.

De deler moet $3! = 6$ zijn, niet 3.

Antwoord Iedere groep komt 6 keer voor; delen door 3 corrigeert de dubbeltelling onvoldoende.

b $C(8,3) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$.

$336 \div 6 = 56$.

Antwoord Er zijn 56 groepen.

Alternatief: $C(8,3) = \frac{8!}{3!5!} = 56$.

10 Een verkeerde deler (vervolg)

c 8^3 telt ook keuzes waarin hetzelfde voorwerp twee of drie keer wordt gebruikt.

Zonder herhaling zijn er $8 \times 7 \times 6 = 336$ geordende keuzes, terwijl $8^3 = 512$.

De 176 extra geordende keuzes zijn niet toegestaan. Delen door 6 verwijdert deze ongeldige keuzes niet.

Antwoord De teller 8^3 hoort bij kiezen met herhaling en kan hier niet gebruikt worden.

Een voorgeschreven samenstelling

11 De onderdelen van een demonstratie

a De twee mechanische modellen kunnen van volgorde wisselen.

Het optische model blijft in deze telling altijd op de laatste plaats.

Er zijn $2! = 2$ mogelijke volgorden van de twee mechanische modellen.

Antwoord Iedere demonstratie wordt 2 keer geteld.

b $C(6,2) = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.

$C(4,1) = 4$.

$15 \times 4 = 60$.

Antwoord Er zijn 60 verschillende demonstraties.

Alternatief: $\frac{6 \times 5 \times 4}{2!} = 60$.

c De teller $6 \times 5 \times 4$ zet de mechanische modellen altijd eerst en het optische model altijd als laatste.

Deze teller bevat slechts 2 volgorden per demonstratie, geen 6.

Delen door 3! zou ook volgorden wegdelen die helemaal niet geteld zijn.

De juiste correctie is delen door 2!, dus $120 \div 2 = 60$.

Antwoord Je deelt deze teller door 2!, omdat alleen de twee mechanische plaatsen onderling verwisselbaar zijn.

12 Een workshopgroep samenstellen

a Het verwisselen van twee gekozen personen levert dezelfde groep op.

Je kiest verschillende personen, zonder iemand twee keer te gebruiken.

Binnen elke beroepsgroep tel je combinaties zonder herhaling.

Antwoord De volgorde telt niet mee; voor elke beroepsgroep gebruik je combinaties zonder herhaling.

b $C(5,2) = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$.

$C(7,2) = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$.

Elke keuze van twee kalligrafen past bij elke keuze van twee boekbinders.

$10 \times 21 = 210$.

Antwoord Er zijn 210 workshopgroepen.

Alternatief: $\frac{5 \times 4 \times 7 \times 6}{2! \times 2!} = 210$.

c Bij vaste rollen telt de volgorde binnen elke beroepsgroep mee.

$5 \times 4 \times 7 \times 6 = 840$.

Elke groep uit b levert $2 \times 2 = 4$ rolverdelingen.

$210 \times 4 = 840$.

Antwoord Er zijn 840 rolverdelingen, vier keer zoveel als workshopgroepen.

13 Een klankinstallatie

a Een andere volgorde van dezelfde vier instrumenten geeft dezelfde installatie.

Er wordt geen instrument twee keer gekozen.

Antwoord De volgorde telt niet mee; combinaties zonder herhaling zijn geschikt.

b Een vaste groep van vier instrumenten heeft 4 keuzes voor het eerste instrument, daarna 3, 2 en 1.

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Antwoord Bij één installatie horen 24 lijsten; dat zijn de 4! volgorden van dezelfde groep.

13 Een klankinstallatie (vervolg)

c Er zijn 8 + 6 = 14 verschillende instrumenten.

$C(14,4) = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

$24024 \div 24 = 1001$.

Antwoord Er zijn 1001 installaties mogelijk.

Alternatief: $C(14,4) = \frac{14!}{4!10!} = 1001$.

d $C(8,2) = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$.

$C(6,2) = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.

$28 \times 15 = 420$.

Antwoord Er zijn 420 installaties met precies twee instrumenten van elke soort.

Alternatief: $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2! \times 2!} = 420$.

14 Metalen monsters

a $C(4,1) = 4$.

$C(9,2) = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$.

$4 \times 36 = 144$.

Antwoord Er zijn 144 proefsets.

Alternatief: $\frac{4 \times 9 \times 8}{2!} = 144$.

b Met één zilverkleurig en twee koperkleurige monsters zijn er 144 sets.

Met twee zilverkleurige en één koperkleurig monster zijn er $C(4,2) \times C(9,1) = 6 \times 9 = 54$ sets.

Deze twee samenstellingen overlappen niet.

$144 + 54 = 198$.

Antwoord Er zijn 198 proefsets met beide kleuren.

Alternatief: Neem alle sets en trek de sets met één kleur af: $C(13,3) - C(4,3) - C(9,3) = 286 - 4 - 84 = 198$.

Uitwerkingen · Herhaling

1 Een observatieavond

a Bij K horen K1, K2 en K3. Bij L horen L1, L2 en L3.

Elke kaart heeft precies één van de twee letters en één van de drie cijfers. Daardoor ontbreekt geen kaart en staat geen kaart tweemaal in de lijst.

Antwoord Er zijn 6 naamkaarten: K1, K2, K3, L1, L2 en L3.

Alternatief: Een rooster met de twee letters als rijen en de drie cijfers als kolommen geeft dezelfde zes kaarten.

b Met herhaling zijn voor iedere plaats 4 cijfers mogelijk: $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Zonder herhaling blijven na de eerste keuze 3 cijfers en na de tweede keuze 2 cijfers over: $4 \times 3 \times 2 = 24$.

In elke toegestane tak zijn er bij de volgende plaats evenveel vervolgmogelijkheden. Daarom geeft het product het totale aantal volledige codes.

Antwoord Met herhaling zijn er 64 codes; zonder herhaling zijn er 24 codes.

c De volgorde telt: verwisselen van twee verschillende kaarten geeft een andere rij.

Voor de vier plaatsen zijn achtereenvolgens 4, 3, 2 en 1 kaarten beschikbaar.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Antwoord Er zijn 24 verschillende rijen.

2 Kaarten uit het atelier

a Een kaart aan het begin heeft een andere plaats dan dezelfde kaart aan het einde. Daarom is bijvoorbeeld A-B-C een andere rondleiding dan C-B-A.

Er zijn 8 keuzes voor het begin, daarna 7 voor het midden en daarna 6 voor het einde.

$8 \times 7 \times 6 = 336$.

Antwoord Er zijn 336 rondleidingen; de volgorde telt mee.

b De middelste plaats is al gevuld met C.

Voor het begin zijn 7 andere kaarten beschikbaar. Voor het einde blijven 6 kaarten over.

$7 \times 6 = 42$.

Antwoord Er zijn 42 rondleidingen met C in het midden.

Alternatief: Van de 336 rondleidingen heeft elk van de acht kaarten even vaak de middelste plaats. Dus $336 \div 8 = 42$.

2 Kaarten uit het atelier (vervolg)

c Geordend kiezen geeft $8 \times 7 \times 6 = 336$ selecties.

Elke bundel met drie verschillende kaarten komt daarin $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ keer voor, bijvoorbeeld A-B-C en C-B-A voor dezelfde bundel.

Het aantal bundels is $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$.

Antwoord Er zijn 56 verschillende bundels. Door door 6 te delen telt iedere bundel precies eenmaal.

3 Een zadenruil

a De twee groentepakjes kunnen op $\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ manieren worden gekozen.

De twee bloemenpakjes kunnen op $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ manieren worden gekozen.

Iedere groentekeuze kan met elke bloemenkeuze worden gecombineerd: $10 \times 6 = 60$.

Antwoord Er zijn 60 ruilsets met precies twee groentepakjes en twee bloemenpakjes.

b Zonder de beperking zijn er $3 \times 4 = 12$ etiketten, omdat iedere vorm elk van de vier kleuren kan krijgen.

Alleen het driehoekige oranje etiket valt af: $12 - 1 = 11$.

Controle per vorm: rond geeft 4, driehoekig geeft 3 en vierkant geeft 4 etiketten. Samen $4 + 3 + 4 = 11$.

Antwoord Er zijn 11 toegestane etiketten.

c De eerste plaats is gevuld met V1.

Voor de tweede plaats zijn 8 pakjes beschikbaar. Na die keuze blijven er 7 voor de derde plaats over.

$8 \times 7 = 56$.

Antwoord Er zijn 56 presentaties die beginnen met V1.

4 Verhaalkaarten en markeringen

a Bij de gegeven telling worden eerste, tweede en derde keuzes onderscheiden. Voor een map maakt die keuzevolgorde geen verschil.

Elke vaste groep van drie kaarten wordt $3! = 6$ keer geteld. De groep P, Q en R komt bijvoorbeeld voor als P-Q-R en R-Q-P.

Het juiste aantal is $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

Antwoord Er zijn 20 verschillende mappen met drie kaarten.

4 Verhaalkaarten en markeringen (vervolg)

b De laatste plaats is gevuld met U.

De eerste drie plaatsen worden gevuld met verschillende kaarten uit de vijf overige kaarten.

$5 \times 4 \times 3 = 60$.

Antwoord Er zijn 60 verschillende verhalen met U op de laatste plaats.

c De volledige lijst is RS, RT, SR, ST, TR en TS.

Na de eerste keuze uit 3 symbolen blijven 2 andere symbolen over: $3 \times 2 = 6$.

Met herhaling zouden er $3 \times 3 = 9$ markeringen zijn. RR, SS en TT zijn verboden: $9 - 3 = 6$.

Antwoord Er zijn 6 toegestane markeringen; beide berekeningen bevestigen de volledige lijst.

Uitwerkingen · Gericht herstel

5 Een verkeerde codeberekening

a Voor het eerste vak zijn 3 letters beschikbaar. De gekozen letter mag niet terugkomen, dus voor het tweede vak blijven 2 letters over.

Lina laat in het tweede vak ook de al gekozen letter toe. Zij telt daardoor AA, BB en CC mee.

De juiste telling is $3 \times 2 = 6$. De codes zijn AB, AC, BA, BC, CA en CB.

Antwoord Er zijn 6 toegestane codes; Lina telt de drie verboden dubbele letters mee.

b Door herhaling blijven per vak 4 letters beschikbaar: $4 \times 4 \times 4 = 64$ codes.

Zonder Y blijven per vak 3 letters beschikbaar: $3 \times 3 \times 3 = 27$ codes.

Minstens één Y geeft $64 - 27 = 37$ codes.

Controle: eerste Y op plaats 1 geeft $4 \times 4 = 16$; eerste Y op plaats 2 geeft $3 \times 4 = 12$; eerste Y op plaats 3 geeft $3 \times 3 = 9$. Deze gevallen overlappen niet en geven samen $16 + 12 + 9 = 37$.

Antwoord Er zijn 37 codes met minstens één Y. Milan gebruikt ten onrechte afnemende aantallen.

6 Hoeveel plaatsen zijn vrij?

a De volgorde telt: een poster op plaats 1 geeft een andere wandindeling dan die poster op plaats 4.

Voor de vier plaatsen zijn 6, 5, 4 en 3 posters beschikbaar. De juiste telling is $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ telt volledige ordeningen van alle zes posters op zes plaatsen. De twee niet opgehangen posters krijgen bij de wand geen plaats.

Antwoord De wand heeft 360 indelingen. Pim telt ook de onderlinge volgorde van de twee niet gebruikte posters mee.

Alternatief: Dezelfde correctie is $6! \div 2! = 720 \div 2 = 360$: elke wand is bij 6! tweemaal geteld door de twee ongebruikte posters te verwisselen.

b B bezet plaats 2 en is nergens anders meer beschikbaar.

Voor de eerste vrije plaats zijn er 5 posters; daarna blijven er 4 en vervolgens 3 over.

$5 \times 4 \times 3 = 60$. De berekening 5^3 laat dezelfde poster op meerdere vrije plaatsen terugkomen.

Antwoord Er zijn 60 wandindelingen met B op plaats 2.

7 Eén groep, veel volgorden

a Voor dezelfde groep bestaan de volgorden S1-S2-W1, S1-W1-S2, S2-S1-W1, S2-W1-S1, W1-S1-S2 en W1-S2-S1.

Elke groep heeft drie verschillende instrumenten. Daarom ontstaan altijd $3! = 6$ keuzevolgorden voor één groep.

Ravi telt elke groep 6 keer. Het aantal groepen is $\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$.

Antwoord Er zijn 35 groepen; Ravi moet zijn geordende telling door 6 delen.

b De blaasparen zijn W1-W2, W1-W3 en W2-W3.

Bij elk van deze 3 paren kan één van de 4 snaarinstrumenten worden gekozen.

Er worden keuzes samengevoegd tot een groep. Daarom worden de aantallen vermenigvuldigd: $3 \times 4 = 12$; optellen geeft geen volledige groepen.

Antwoord Er zijn 12 groepen met precies één snaarinstrument en twee blaasinstrumenten.

Uitwerkingen · Nieuwe controle

8 Controle: mogelijkheden en posities

a De tweetallen met A zijn AB, AC en AD. Zonder A zijn er BC, BD en CD.

Er is geen tweede vermelding van bijvoorbeeld BA, omdat BA hetzelfde tweetal is als AB.

Antwoord Er zijn 6 tweetallen: AB, AC, AD, BC, BD en CD.

Alternatief: Een rooster met alleen de cellen boven de diagonaal geeft dezelfde zes tweetallen.

b Bij elke broodsoort zijn alle 6 belegsoorten mogelijk, en bij elke combinatie zijn alle 3 dranken mogelijk.

Daarom zijn er $2 \times 6 \times 3 = 36$ volledige keuzes.

Antwoord Er zijn 36 lunchkeuzes.

c Joris laat herhaling toe en telt $6^3 = 216$ codes.

Zonder herhaling zijn achtereenvolgens 6, 5 en 4 letters beschikbaar: $6 \times 5 \times 4 = 120$.

De overige codes hebben minstens één herhaalde letter: $216 - 120 = 96$.

Antwoord Er zijn 120 toegestane codes en 96 door Joris meegetelde verboden codes.

d Er blijven 3 toegestane rijen en 2 toegestane kolommen over: $3 \times 2 = 6$ vakken.

Controle vanuit alle $4 \times 3 = 12$ vakken: rij A heeft 3 vakken en kolom 1 heeft 4 vakken. Vak A1 zit in beide verboden delen en is zo tweemaal afgetrokken.

$12 - 3 - 4 + 1 = 6$.

Antwoord Er mogen 6 vakken worden gebruikt.

Alternatief: De volledige lijst is B2, B3, C2, C3, D2 en D3; deze bevat zes vakken.

e Voor de interviewer zijn 8 leerlingen beschikbaar.

Voor de geïnterviewde blijven 7 andere leerlingen over. De rollen zijn verschillend.

$8 \times 7 = 56$.

Antwoord Er zijn 56 rolverdelingen.

8 Controle: mogelijkheden en posities (vervolg)

f Plaats 3 is bezet door D. De overige vier karretjes vullen de vier vrije plaatsen op 4! = 24 manieren.

Verwisselen van A en B koppelt iedere rij met A vóór B aan precies één rij met B vóór A. Geen van deze rijen valt samen.

Precies de helft voldoet: 24 ÷ 2 = 12.

Antwoord Er zijn 12 rijen met D op plaats 3 en A vóór B.

Alternatief: Kies twee van de vier vrije plaatsen voor A en B: $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ keuzes. A moet op de vroegste van die twee plaatsen staan. C en E kunnen op de twee resterende plaatsen op 2 manieren staan. Samen 6 × 2 = 12.

9 Controle: ordenen en groeperen

a Bij tafel A zijn links en rechts verschillende plaatsen. Verwisselen geeft andere kaarsen op die plaatsen en dus een nieuwe uitkomst.

Bij tafel B blijven na verwisselen dezelfde twee kaarsen in de mand. De inhoud verandert niet.

Antwoord Bij tafel A telt de volgorde mee; bij tafel B niet.

b P is vastgelegd. De vijf andere bordjes worden allemaal precies eenmaal over de vijf vrije haken verdeeld.

Voor de vrije haken zijn achtereenvolgens 5, 4, 3, 2 en 1 bordjes beschikbaar.

5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120.

Antwoord Er zijn 120 indelingen.

Alternatief: Van alle 6! = 720 indelingen heeft P even vaak elk van de zes haken. Daarom zijn er 720 ÷ 6 = 120 indelingen met P aan haak 4.

c De volgorde telt niet, omdat alleen de inhoud van de werkdoos wordt vastgelegd.

De vijf gekozen stempels vormen een groep. Iedere keuze van de drie achtergebleven stempels bepaalt precies één werkdoos.

Het aantal groepen van drie uit acht is $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$.

Antwoord Er zijn 56 mogelijke werkdozen; een telling van groepen zonder herhaling past bij de vraag.

Alternatief: Rechtstreeks de vijf gekozen stempels tellen geeft $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$.

9 Controle: ordenen en groeperen (vervolg)

d Ena telt alleen de keuze voor de eerste plaats. Nadat die gekozen is, kunnen de andere drie tekens nog op $3 \times 2 \times 1 = 6$ manieren staan.

Elke groep komt daarom $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ keer in het bestand voor.

Het juiste aantal groepen is $360 \div 24 = 15$.

Antwoord Ena's deling door 4 is onjuist. Er zijn 15 groepen.

e Het gaat om groepen van negen soorten zonder herhaling; de volgorde telt niet.

De drie niet gekozen soorten bepalen elk plan ook volledig.

Het aantal plannen is $\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$.

Antwoord Er zijn 220 soortenplannen.

Alternatief: Rechtstreeks negen soorten kiezen geeft $\frac{12!}{9! \times 3!} = 220$.

f Zonder beperking zijn er $\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ groepen van drie boeken.

De verboden kratten hebben uitsluitend verhalenboeken: $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ groepen.

$84 - 10 = 74$.

Antwoord Er zijn 74 leeskratten met minstens één informatieboek.

Alternatief: Precies één informatieboek geeft $4 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 40$. Precies twee geeft $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 5 = 30$.

Precies drie geeft $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$. Samen $40 + 30 + 4 = 74$.

Uitwerkingen · Test jezelf

10 Keuzes in een werkplaats

a Vanuit A zijn er S-A-P en S-A-Q; vanuit B is er S-B-Q; vanuit C is er S-C-P.

Iedere route begint met één van de drie gegeven tussenpunten. Alle toegestane vervolgen daarvan zijn opgenomen en geen route staat tweemaal in de lijst.

Antwoord De vier routes zijn S-A-P, S-A-Q, S-B-Q en S-C-P.

Alternatief: Een boomdiagram met takken S naar A, B en C en de genoemde eindtakken heeft dezelfde vier eindroutes.

b Voor elk van de 4 materialen zijn alle 3 vormen mogelijk. Bij elke combinatie zijn beide afwerkingen mogelijk.

De aantallen vervolgmogelijkheden zijn daardoor per stap gelijk: $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Antwoord Er kunnen 24 verschillende badges worden gemaakt.

c Met herhaling blijven voor elk van de vier plaatsen 5 cijfers beschikbaar: $5^4 = 625$.

Zonder herhaling valt na iedere keuze het gebruikte cijfer af: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$.

Ook 0 is op elke plaats toegestaan; er hoeft voor de eerste plaats geen cijfer te worden uitgesloten.

Antwoord Met herhaling zijn er 625 codes; zonder herhaling zijn er 120 codes.

d Alle labels samen: $4 \times 4 = 16$. Zonder D: $3 \times 3 = 9$. Daarom zijn er $16 - 9 = 7$ labels met minstens één D.

Controle met een volledige lijst: DA, DB, DC, DD, AD, BD en CD. Dit zijn zeven verschillende labels.

Antwoord Er zijn 7 toegestane labels.

Alternatief: Een andere controle telt 4 labels met D vooraan en 3 extra labels met D achteraan en een andere letter vooraan: $4 + 3 = 7$.

11 Geluidsfragmenten presenteren

a De juryset bevat in beide gevallen A, C en F; de keuzevolgorde wordt niet vastgelegd. Het is dezelfde set.

De presentatie begint de ene keer met A en de andere keer met F. De vastgelegde plaatsen verschillen, dus het zijn verschillende presentaties.

Antwoord Voor de jury telt de volgorde niet; voor de presentator wel.

11 Geluidsfragmenten presenteren (vervolg)

b Voor de eerste plek zijn 7 fragmenten beschikbaar, daarna 6 voor de tweede plek en 5 voor de derde plek.

$7 \times 6 \times 5 = 210$.

Antwoord Er zijn 210 presentaties.

c Alle zeven verschillende fragmenten krijgen een plaats.

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Het aantal beschikbare fragmenten neemt na iedere gekozen plek met één af.

Antwoord Er zijn 5040 volgorden.

d De eerste en laatste plek zijn al bezet door D en F.

De vijf overige fragmenten worden over de vijf tussenliggende plekken verdeeld.

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Antwoord Er zijn 120 presentaties met D eerst en F laatst.

12 Een veldtas samenstellen

a Een andere keuzevolgorde verandert de inhoud van de tas niet. De volgorde telt dus niet mee.

Een telling van groepen zonder herhaling past. Een geordende telling moet worden gecorrigeerd voor de 3! volgorden van iedere groep.

Het aantal tassen is $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$.

Antwoord Er zijn 120 tassen met drie hulpmiddelen; de volgorde telt niet mee.

b De berekening onderscheidt de eerste, tweede, derde en vierde keuze, terwijl een tas alleen door haar inhoud wordt bepaald.

Dezelfde vier verschillende hulpmiddelen kunnen op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ manieren worden gekozen. Elk van die volgorden geeft dezelfde tas.

Antwoord Een vaste tas wordt 24 keer geteld. Noor moet voor een aantal tassen door 24 delen.

Alternatief: Bij de tas met K1, K2, L1 en L2 kunnen 4 hulpmiddelen als eerste worden gekozen; daarna zijn er 3, 2 en 1 keuzes. Dat verklaart de factor 24.

c De vijf hulpmiddelen zijn verschillend en hun volgorde in de tas telt niet.

Het aantal tassen is $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$.

Antwoord Er zijn 252 tassen met vijf hulpmiddelen.

12 Een veldtas samenstellen (vervolg)

d Twee van de vier kompassen kiezen geeft $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ keuzes.

Drie van de zes lupen kiezen geeft $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ keuzes.

Iedere kompassenkeuze kan met elke lupenkeuze worden samengevoegd: $6 \times 20 = 120$.

Antwoord Er zijn 120 tassen met precies twee kompassen en drie lupen.