# HOOFDSTUK 5

# Telproblemen - SE

Wiskunde A · havo 5



**IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:**

systematisch tellen en de productregel gebruiken;
volgorden en geordende selecties tellen;
groepen kiezen en combinaties toepassen.

# Wat weet je nog?

Controleer eerst de basis: aantallen vermenigvuldigen en optellen, een tabel lezen en herkennen wat één complete mogelijkheid is. Deze vijf opgaven horen bij de gezamenlijke voorkennis van hoofdstuk 5.

## 1 Aantallen samenvoegen

**a** Er staan 3 dozen met elk 8 fiches en 2 dozen met elk 5 fiches. Hoeveel fiches zijn dat samen?

**b** Een rek heeft 6 rijen met elk 7 vakken. In 9 vakken ligt al iets. Hoeveel vakken zijn leeg?

## 2 Wat is één mogelijkheid?

De tabel geeft vier complete ontwerpen voor een tekenkaart. Een ontwerp bestaat uit een vorm én een kleur.

| Ontwerp | Vorm | Kleur |
|---|---|---|
| 1 | driehoek | blauw |
| 2 | vierkant | rood |
| 3 | driehoek | rood |
| 4 | cirkel | rood |

**a** Hoeveel van de gegeven ontwerpen zijn rood?

**b** Noor zegt: “Ontwerp 1 en ontwerp 3 zijn dezelfde mogelijkheid, want ze hebben allebei een driehoek.” Heeft Noor gelijk? Hoeveel verschillende complete ontwerpen staan er in de tabel?

## 3 Rekenen en beschikbare labels

Voor een schoolatelier zijn 12 kaarten met elk 3 opdrachten klaargelegd. Daarnaast liggen er 5 losse opdrachten. Voor zes dozen zijn de labels A1, A2, B1, B2, C1 en C2 beschikbaar. De labels A1 en B2 zijn al gebruikt.

**a** Hoeveel opdrachten liggen er in totaal klaar?

**b** Welke labels zijn nog beschikbaar? Geef ook het aantal.

## 4 Een voorraad aflezen

De tabel geeft de aantallen enveloppen in één voorraadbak.

| Kleur | Aantal enveloppen |
|---|---|
| Groen | 4 |
| Oranje | 6 |
| Blauw | 5 |

**a** Hoeveel enveloppen liggen er in deze bak?

**b** Er staan twee bakken met precies dezelfde inhoud. Hoeveel enveloppen zijn dat samen?

## 5 Letters vergelijken

Op vier kaartjes staat een code van twee letters. De tabel toont alle kaartjes.

| Kaartje | Code |
|---|---|
| 1 | AA |
| 2 | AB |
| 3 | BA |
| 4 | BB |

**a** Welke codes bevatten precies één letter A? Hoeveel zijn dat?

**b** Welke codes worden anders als je ze van rechts naar links leest?

# 5.1 Systematisch tellen en de productregel

**Leerdoel**

Ik kan alle mogelijkheden volledig en zonder dubbeltelling ordenen in een lijst, rooster of boomdiagram.

**Theorie**

## Volledig en zonder dubbeltelling

**Wat tel je?** Spreek eerst af wat één volledige mogelijkheid is. Welke onderdelen horen erbij? Heeft iedere plaats een eigen rol? Als links en rechts verschillend zijn, zijn PQ en QP twee mogelijkheden. Als de opdracht alleen om een groep gaat, kan een andere volgorde dezelfde groep voorstellen. Lees daarom vóór het tellen of de volgorde meetelt en of je een keuze mag herhalen.

**Drie manieren om te ordenen** Een systematische lijst houdt een vaste volgorde aan: werk eerst alle vervolgen van de eerste keuze af en ga dan naar de volgende eerste keuze. Bij twee keuzes kan een rooster helpen: iedere rij hoort bij één eerste keuze en iedere kolom bij één tweede keuze. Een toegestaan vak telt één mogelijkheid. Een boomdiagram geeft per keuzestap takken. Eén volledig pad tot een eindtak is één mogelijkheid. Een tabel van alle eindtakken kan hetzelfde overzicht geven.

**Is je overzicht compleet?** Controleer dat elke toegestane eerste keuze een eigen groep heeft, dat alle toegestane vervolgen in die groep staan en dat geen complete mogelijkheid twee keer voorkomt. Verboden mogelijkheden tellen niet mee. In een rooster kun je ze markeren en daarna de toegestane vakken tellen. In voorbeeld 5.1A, blz. 448 zie je hoe een tabel de eindtakken van een kleine keuzeverzameling ordent.

**Onthoud:** Tel volledige mogelijkheden en geef elke mogelijkheid precies één plaats.

### 1 Eindtakken bewaren

Een decorstuk heeft links en rechts een letterplaatje. Je kiest uit P, Q en R. De volgorde links-rechts telt mee: PQ en QP zijn verschillende decorstukken. Voor a en b mag een letter niet twee keer worden gebruikt.

a Maak een boomdiagram of een tabel met alle eindtakken. Begin met de drie keuzes voor links en noteer bij iedere eindtak de twee letters in volgorde. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

## 1 Eindtakken bewaren (vervolg)

**b** Een leerling schrapt QP, RP en RQ omdat deze dezelfde twee letters hebben als PQ, PR en QR. Leg uit waarom die telling niet bij dit decorstuk past.

**c** Nu mag dezelfde letter links en rechts staan. Schrijf de volledige lijst in dezelfde vaste volgorde en tel de mogelijkheden.

## 2 Oplopende nummerkaart

Een nummerkaart heeft een bovenste en een onderste vak. In elk vak mag 2, 4, 7 of 9 staan. Een kaart is alleen toegestaan als het bovenste getal kleiner is dan het onderste. De plaatsen boven en onder zijn verschillend.

**a** Schrijf alle toegestane kaarten volledig en zonder dubbeltelling op. Noteer bijvoorbeeld (2, 4) voor boven 2 en onder 4.

**b** Zonder de voorwaarde zouden ook gelijke getallen en aflopende kaarten zijn toegestaan. Hoeveel van die kaarten vallen door de voorwaarde af? Controleer daarmee het aantal uit a.

**c** Daan wil in a $4 \times 3$ rekenen, omdat de twee getallen verschillend moeten zijn. Welke extra eis mist hij? Leg uit hoe je aan de groepen uit a ziet dat je hier niet $4 \times 3$ kunt gebruiken.

## 3 Een keuzerooster aanpassen

Een atelier biedt vier modellen van een houder: K, M, P en T. Je kiest één model en één kleur: groen, blauw of wit. Een keuze bestaat uit het model met de kleur; model en kleur worden niet omgewisseld. Model M kan alleen groen zijn. Model T kan niet groen zijn. De andere combinaties zijn toegestaan.

**a** Maak een rooster met de vier modellen als rijen en de drie kleuren als kolommen. Geef in ieder vak aan of de combinatie is toegestaan. Hoeveel verschillende houders zijn mogelijk?

**b** Controleer het aantal uit a door te beginnen met alle model-kleurcombinaties en de verboden combinaties weg te nemen.

**c** De beperking voor T verandert: T kan nu niet blauw zijn, maar wel groen en wit. De beperking voor M blijft gelden. Verandert het aantal? Zijn ook precies dezelfde houders mogelijk? Leg beide antwoorden uit.

# Opeenvolgende keuzes vermenigvuldigen

**Leerdoel**

Ik kan de productregel gebruiken bij opeenvolgende keuzes en uitleggen waarom ik de aantallen mag vermenigvuldigen.

**Theorie**

## Opeenvolgende keuzes vermenigvuldigen

**De productregel** Zijn er bij de eerste stap a keuzes, bij elke eerdere keuze b mogelijkheden voor de tweede stap en daarna steeds c mogelijkheden voor de derde stap? Dan is het aantal volledige keuzeroutes $a \times b \times c$. Elke eerste keuze levert evenveel vervolgkeuzes op. Het product telt elke complete route één keer.

**Controleer de factoren** Een factor hoort bij één echte keuzestap. Een vaste keuze geeft factor 1. Ook “geen extra onderdeel” kan één keuze zijn. De beschikbare vervolgkeuzes hoeven niet letterlijk dezelfde te zijn; hun aantal moet bij het gekozen product wel voor iedere route gelijk zijn. Als een beperking verschillende aantallen vervolgen veroorzaakt, tel je de groepen apart en tel je hun aantallen op. In voorbeeld 5.1B, blz. 449 zie je eerst de productregel en daarna zo’n indeling in groepen.

**Onthoud:** Geef bij iedere factor aan welke keuzestap je telt.

### 4 Van keuzes naar een product

Voor een korte workshop kies je één onderwerp: lucht, water of licht. Je kiest ook één tijdvak: T1, T2, T3 of T4, en één ruimte: E of F. Iedere combinatie van onderwerp, tijdvak en ruimte is mogelijk, behalve als bij een vraag een beperking wordt genoemd.

**a** Hoeveel verschillende inschrijvingen zijn mogelijk zonder beperking? Geef de drie aantallen per keuzestap en leg uit waarom je ze mag vermenigvuldigen.

**b** Bij het onderwerp water vervalt tijdvak T4 in beide ruimtes. Bereken het nieuwe aantal door verboden inschrijvingen van het totaal af te trekken.

**c** Controleer b door de toegestane inschrijvingen voor lucht, water en licht apart te tellen en daarna op te tellen.

### 5 Meer keuzes, hoeveel meer?

In een verhaalprogramma kiest een speler één beginwereld, één missie en één einde. Er zijn 4 beginwerelden, 3 missies en 5 eindes. Elk einde kan bij elke missie, en elke missie kan bij elke beginwereld. De drie onderdelen hebben elk een eigen rol.

**a** Hoeveel volledige verhalen zijn mogelijk? Licht toe waarom jouw telling alle keuzes precies één keer telt.

**b** Er komt één beginwereld én één einde bij. De 3 missies blijven. Ravi denkt dat er slechts $1 \times 3 \times 1 = 3$ verhalen bijkomen. Bereken de werkelijke toename en leg uit wat Ravi mist.

**c** Ga weer uit van 4 beginwerelden, 3 missies en 5 eindes. Je mag precies één beginwereld, één missie óf één einde toevoegen. Welke keuze levert minstens 80 verhalen op? Onderbouw met alle drie de totalen.

### 6 Een begrensde ontwerpcatalogus

Een museum maakt een catalogus van mogelijke souvenirlabels. Er zijn 3 vormen, 2 maten, 4 kleuren en 2 bevestigingen. Elk volledig label heeft precies één keuze uit elk van deze vier groepen. Iedere combinatie is uitvoerbaar. Iedere verschillende combinatie krijgt één eigen regel in de catalogus.

**a** Hoeveel regels zijn nodig voor de catalogus zonder tekstkeuze? Leg uit waarom elke factor nodig is.

**b** Een label kan bovendien zonder tekst worden gemaakt of met precies één van 5 verschillende teksten. Hoeveel catalogusregels zijn dan nodig?

**c** De catalogus mag hoogstens 220 regels hebben. Alle keuzes uit a blijven beschikbaar en een label zonder tekst moet mogelijk blijven. Hoeveel van de 5 teksten kun je maximaal behouden? Toon ook waarom één tekst meer niet past.

# Blijft een keuze beschikbaar?

**Leerdoel**

Ik kan tellen met en zonder herhaling en de juiste aantallen per keuzestap gebruiken.

**Theorie**

## Blijft een keuze beschikbaar?

**Met herhaling** Als een gekozen teken opnieuw gebruikt mag worden, blijft het voor een volgende positie beschikbaar. Bij drie vaste posities en vier tekens zijn er dan $4 \times 4 \times 4$ mogelijkheden, zolang geen andere beperking geldt. Een positie die door een eerdere keuze vastligt, geeft maar 1 mogelijkheid.

**Zonder herhaling** Als je elk teken hoogstens één keer mag gebruiken, zijn gebruikte tekens bij latere stappen niet meer beschikbaar. Voor drie vaste posities uit vier verschillende tekens krijg je achtereenvolgens 4, 3 en 2 keuzes. Dat zijn $4 \times 3 \times 2$ mogelijkheden. Dezelfde aanpak werkt bij verschillende rollen voor personen: één persoon kan niet tegelijk twee rollen krijgen als dat verboden is. Het gaat hier om onderscheiden posities of rollen; je mag dus niet automatisch de volgorde wegstrepen.

**Onthoud:** Lees per vraag of herhaling toegestaan is; een eerdere afspraak geldt niet vanzelf voor een nieuwe vraag.

### 7 Een letter opnieuw gebruiken

Een bord heeft drie vaste vakken: links, midden en rechts. Je vult ieder vak met J, K, L of N. Een andere letter op een andere plaats geeft een ander bord. Welke herhaling is toegestaan, staat bij iedere vraag.

**a** Een letter mag meerdere keren voorkomen. Hoeveel borden zijn mogelijk? Schrijf het aantal keuzes per vak op.

**b** Een letter mag nu hoogstens één keer voorkomen. Hoeveel borden zijn mogelijk? Schrijf opnieuw het aantal keuzes per vak op.

**c** Rana gebruikt voor b de berekening $4 \times 3 \times 3$. Neem J links en K in het midden. Welke letters zijn rechts toegestaan? Leg daarmee uit welke factor Rana moet veranderen.

## 8 Posities en herhaling

Een sorteermachine toont achter elkaar drie labels. De beschikbare labels zijn P, Q, R, S, T en U. De eerste, tweede en derde positie zijn verschillend: PQR en QPR zijn andere signalen. De voorwaarden worden per vraag gegeven.

**a** De drie labels moeten verschillend zijn. Hoeveel signalen zijn mogelijk?

**b** De eerste positie is nu vast R en de drie labels moeten nog steeds verschillend zijn. Hoeveel signalen blijven mogelijk?

**c** Voor deze vraag mag een label onbeperkt herhaald worden. De eerste en de derde positie moeten hetzelfde label hebben; voor de tweede positie geldt geen extra beperking. Hoeveel signalen zijn mogelijk?

## 9 Verschillende rollen

Een toneelgroep heeft 7 verschillende vrijwilligers. Bij een voorstelling worden rollen verdeeld. Een persoon mag in dezelfde voorstelling hoogstens één rol krijgen. De rolverdeling telt mee: dezelfde twee personen met hun rollen omgewisseld geven een andere verdeling. Van de 7 vrijwilligers zijn er 3 opgeleid als leider.

**a** Zonder opleidingseis kies je één leider en één controleur. Hoeveel rolverdelingen zijn mogelijk?

**b** Alleen een van de 3 opgeleide vrijwilligers mag leider zijn. De controleur hoeft niet opgeleid te zijn. Hoeveel rolverdelingen zijn nu mogelijk?

**c** Bij de situatie van b komt één schrijver als derde rol erbij. Ook de schrijver hoeft niet opgeleid te zijn. Een planner gebruikt $3 \times 6 \times 6$. Beoordeel die berekening en geef het juiste aantal.

# Beperkingen verwerken en controleren

**Leerdoel**

Ik kan een eenvoudige beperking verwerken en mijn telling met een tweede aanpak controleren.

**Theorie**

## Beperkingen verwerken en controleren

**Direct of via uitsluiten** Je kunt een beperking meteen verwerken in de toegestane keuzes. Je kunt ook eerst een groter, eenvoudig te tellen geheel nemen en daar de verboden volledige mogelijkheden van aftrekken. Trek alleen mogelijkheden af die echt in dat geheel zitten en trek elke verboden mogelijkheid precies één keer af. Soms is het duidelijker om toegestane mogelijkheden in gescheiden groepen te verdelen en die groepsaantallen op te tellen.

**Een tweede aanpak** Een controle telt dezelfde verzameling op een andere manier, bijvoorbeeld eerst per eerste keuze en daarna via het totaal min de verboden gevallen. Een volledige lijst of een rooster kan een kleinere telling controleren. Alleen dezelfde berekening nogmaals uitrekenen controleert je rekenwerk, maar toont niet of je de juiste mogelijkheden hebt gekozen. In voorbeeld 5.1B, blz. 449 geeft tellen per letter een echte tweede controle.

**Onthoud:** Bij een controle moeten beide tellingen over precies dezelfde toegestane mogelijkheden gaan.

### 10 Een beperking meteen verwerken

Een tweecijferige code bestaat uit een tientalpositie en een eenheidpositie. Je gebruikt alleen de cijfers 0, 2, 5 en 8. Het eerste cijfer mag niet 0 zijn en de twee cijfers moeten verschillend zijn. Zo is 20 toegestaan en 02 niet. De volgorde telt mee.

**a** Bereken het aantal toegestane codes zonder eerst een lijst te maken. Leg uit waarom je mag vermenigvuldigen, ook al hangen de beschikbare laatste cijfers af van het eerste cijfer.

**b** Controleer a met een volledige systematische lijst.

**c** Daarna wordt ook 0 op de laatste positie verboden. Hoeveel codes blijven over? Controleer dit met een andere telling.

### 11 Het aantal is gelijk, de keuzes niet

Een verzendpakket heeft één soort omslag: A, B, C of D, en één label: X, Y of Z. Een omslag met label is één mogelijkheid; de onderdelen hebben verschillende rollen. Op omslag A mag label X niet. Label Z mag alleen op omslag A. De overige combinaties zijn toegestaan.

**a** Hoeveel verschillende pakketten zijn mogelijk? Controleer je antwoord met een tweede aanpak.

**b** De planner zegt: “Ik krijg $4 \times 2 = 8$, dus op elke omslag mogen dezelfde twee labels.” Welke helft van deze uitspraak klopt en welke helft niet? Leg uit.

### 12 Buren en verre posities

Een ornament heeft drie vaste kleurposities: links, midden en rechts. Op iedere positie kies je amber, blauw of crème. We noteren de kleuren kort als A, B en C. De volgorde telt mee. Een kleur mag herhaald worden, zolang aan de voorwaarden van de vraag wordt voldaan.

**a** Twee posities naast elkaar moeten verschillende kleuren hebben. Links en rechts mogen wel dezelfde kleur hebben. Hoeveel ornamenten zijn mogelijk?

**b** Bij de voorwaarden uit a komt nu de eis dat ook links en rechts verschillend zijn. Hoeveel ornamenten blijven over? Leg uit welke keuzestap verandert.

**c** Vervang alle voorgaande voorwaarden door alleen de eis dat links en rechts verschillend zijn. Het midden mag elke kleur hebben. Hoeveel ornamenten zijn dan mogelijk? Vergelijk dit met a en verklaar het verschil.

### 13 Waar gaat de telling mis?

Bij een ophaalpunt kies je één pakketsoort, U of N, één tijdvak, T1, T2, T3 of T4, en één balie, E of F. Alle balies zijn voor ieder toegestaan pakket en tijdvak bruikbaar. Pakket N kan niet in T3 of T4 worden opgehaald. De drie keuzes hebben vaste verschillende rollen.

**a** Mila rekent $2 \times 2 \times 2 = 8$. Zij gebruikt bij beide pakketsoorten alleen T1 en T2. Leg haar fout uit en bereken het juiste aantal.

**b** Bo begint met $2 \times 4 \times 2 = 16$ en trekt 2 af omdat twee tijdvakken verboden zijn. Leg zijn fout uit en verbeter zijn berekening.

**c** Controleer de aanpak in een kleinere situatie. Gebruik alleen T1, T2 en T3; alle andere afspraken blijven hetzelfde. Noteer alle toegestane volledige mogelijkheden systematisch en tel ze.

### 14 Zelftest: signaalvenster

Een machine heeft een linker en een rechter signaalvenster. Elk venster toont één van vier tekens: cirkel C, ruit R, kruis K of ster S. Een links-rechtspaar is één signaal. CR en RC zijn verschillende signalen. Welke herhaling is toegestaan, staat bij de vraag.

**a** De twee tekens moeten verschillend zijn. Geef alle signalen volledig en zonder dubbeltelling, en vermeld het aantal.

**b** Dezelfde twee vensters mogen nu ook hetzelfde teken tonen. Hoeveel signalen zijn mogelijk? Verklaar het verschil met a.

**c** De machine krijgt een derde venster. De vensters hebben vaste plaatsen links, midden en rechts. Alle drie de tekens moeten verschillend zijn. Hoeveel signalen zijn mogelijk?

### 15 Zelftest: routepakketten

Een routepakket bestaat uit één startplek, één tussenstop en één eindmarkering. Er zijn 3 startplekken: haven, park en plein. Er zijn 5 verschillende tussenstops, genummerd 1 tot en met 5, en 2 verschillende eindmarkeringen. Alle combinaties zijn mogelijk, tenzij de vraag een beperking geeft. De drie onderdelen zijn verschillende rollen en worden niet omgewisseld.

**a** Hoeveel routepakketten zijn mogelijk zonder beperking? Verantwoord je berekening.

**b** Bij startplek haven zijn tussenstop 2 en tussenstop 5 verboden. De andere startplekken hebben geen beperkingen. Hoeveel routepakketten blijven mogelijk?

**c** Controleer je antwoord bij b met een andere telling en laat zien dat je alle toegestane routepakketten precies één keer meetelt.

### 16 Zelftest: slotcodes

Een slotcode heeft drie vaste cijferposities en gebruikt alleen 1, 2, 3, 4, 5 en 6. De volgorde telt mee. Het eerste cijfer moet even zijn en het laatste cijfer moet verschillen van het eerste. Een code met een andere volgorde is een andere code.

**a** Cijfers mogen worden herhaald zolang de twee genoemde voorwaarden gelden. Hoeveel codes zijn mogelijk?

**b** Nu mag geen enkel cijfer in de code twee keer voorkomen. Het eerste cijfer blijft even. Hoeveel codes zijn mogelijk?

# 5.2 Volgorde en permutaties

**Leerdoel**

Ik kan uit een situatie bepalen of verschillende volgorden verschillende uitkomsten opleveren.

**Theorie**

## Wat betekent een andere volgorde?

**Plekken en rollen** Een uitkomst kan meer bevatten dan de gekozen personen of voorwerpen. Bij een rij is ook de plek van elk voorwerp van belang. Bij rollen telt mee wie welke rol krijgt. Wissel twee personen of voorwerpen om: verandert een plek of rol die in de situatie betekenis heeft, dan heb je een andere uitkomst.

**Een groep of een ordening** Als alleen telt wie of wat is gekozen, is een andere schrijfvolgorde van dezelfde groep geen nieuwe uitkomst. Als plek 1 en plek 2 of twee rollen verschillend zijn, telt de volgorde wel mee. Beschrijf dus eerst wat één uitkomst precies vastlegt. In voorbeeld 5.2A, blz. 451 zie je waarom de plaatsen in een reeks verschillende uitkomsten geven.

**Onthoud:** Vraag eerst welke plekken of rollen onderdeel van de uitkomst zijn.

### 1 Drie tegels, verschillende plekken

Drie verschillende reliëftegels heten A, B en C. Een tegel mag in een opstelling maar één keer voorkomen. Je zet tegels van links naar rechts op genummerde plekken.

**a** Je gebruikt twee tegels. Zijn de opstellingen AB en BA dezelfde uitkomst? Leg uit wat de plekken betekenen.

**b** Hoeveel keuzes heb je voor plek 1 en daarna voor plek 2? Bereken het aantal opstellingen van twee tegels.

**c** Nu gebruik je alle drie de tegels. De korte schrijfwijze voor $3 \times 2 \times 1$ is $3!$, uitgesproken als 3 faculteit. Schrijf het product bij $3!$ en bereken het aantal volledige opstellingen.

**d** Je gebruikt alle drie de tegels en B staat vast op plek 1. Welke opstellingen zijn mogelijk? Hoeveel zijn dat?

## 2 Een kijkvolgorde maken

Vier verschillende korte films hebben de codes A, B, C en D. Je bekijkt twee verschillende films. De eerste en tweede film vormen samen een kijkvolgorde.

| Eerste film | Mogelijke tweede films |
|---|---|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |

**a** Twee kijkers kiezen allebei de films A en C. De ene kijkt eerst A, de andere eerst C. Hebben zij dezelfde gekozen groep films? Hebben zij dezelfde kijkvolgorde? Licht beide antwoorden toe.

**b** Vul in de tabel bij iedere eerste film alle mogelijke tweede films in. Hoeveel verschillende kijkvolgorden zijn er?

## 3 Rollen en een spreekvolgorde

Ina, Jamal, Koen, Liv en Mona zijn vijf verschillende deelnemers. Ieder kan elke genoemde rol of plek krijgen. Een deelnemer wordt per uitkomst maar één keer ingezet.

**a** Ina wordt voorzitter en Jamal notulist. Bij een tweede verdeling worden hun rollen omgewisseld. Zijn dit verschillende rolverdelingen? Verklaar je antwoord met de betekenis van de twee rollen.

**b** Alle vijf deelnemers spreken na elkaar. Ina spreekt als eerste. Hoeveel spreekvolgorden zijn mogelijk?

**c** Alle vijf deelnemers spreken na elkaar. Als eerste spreekt Ina of Jamal. Hoeveel spreekvolgorden zijn nu mogelijk?

# Iedere keuze verkleint de voorraad

**Leerdoel**

Ik kan geordende selecties zonder herhaling tellen met een product van afnemende aantallen.

**Theorie**

## Iedere keuze verkleint de voorraad

**Geen herhaling** Een geordende selectie gebruikt een deel van de beschikbare verschillende personen of voorwerpen. De posities of rollen zijn onderscheidbaar. Als herhaling verboden is, neemt na elke ingevulde positie het aantal beschikbare keuzes met één af. Vermenigvuldig de aantallen per positie, omdat iedere eerste keuze gecombineerd kan worden met iedere toegestane volgende keuze.

**Precies zoveel factoren als plekken** Kies r voorwerpen uit n verschillende voorwerpen en zet ze op r verschillende plekken, zonder herhaling. Gebruik $n \times (n - 1) \times \ldots \times (n - r + 1)$, met precies r factoren. Hierbij is r minstens 1 en niet groter dan n. Voor drie plekken zijn dat n, n – 1 en n – 2. In voorbeeld 5.2A, blz. 451 zie je hoe de aantallen per positie worden vastgesteld.

**Onthoud:** Tel de gevulde plekken; zoveel factoren moet je product hebben.

### 4 Sensoren op vaste kanalen

Een meetopstelling heeft zeven verschillende sensoren A tot en met G. De kanalen hebben verschillende namen. Op ieder gebruikt kanaal komt één sensor, en een sensor wordt in een opstelling niet herhaald.

**a** Je vult de twee kanalen P en Q. Hoeveel toewijzingen zijn mogelijk?

**b** Je vult de vier kanalen P, Q, R en S. Hoeveel toewijzingen zijn mogelijk?

**c** Een vergelijkbare opstelling heeft n verschillende sensoren, met n minstens 3. Schrijf een telproduct voor drie verschillende kanalen. Verklaar ieder van de drie factoren.

## 5 Hoeveel plekken zijn gevuld?

Acht verschillende proefnotities A tot en met H kunnen in een geordende afleverlijst worden gezet. Elke notitie mag hoogstens één keer in die lijst staan.

| Beschikbare notities | Plekken in de lijst | Aantal afleverlijsten |
|---|---|---|
| 8 | 1 | |
| 8 | 3 | |
| 8 | 5 | |

**a** Bereken voor elke rij van de tabel het aantal afleverlijsten. Schrijf de gebruikte producten op.

**b** Een afleverlijst met een onbekend aantal plekken kan op 1680 manieren worden gemaakt. Hoeveel plekken heeft de lijst? Laat zien hoe je dit afleidt.

# Alles krijgt een plek

**Leerdoel**

Ik kan bij een volledige ordening de faculteit gebruiken en verklaren met een uitgeschreven product.

**Theorie**

## Alles krijgt een plek

**Faculteit** Bij een volledige ordening krijgen alle n verschillende voorwerpen een van de n onderscheidbare plekken. De aantallen keuzes lopen van n tot en met 1. De afkorting is n!, uitgesproken als n faculteit: $n! = n \times (n - 1) \times \ldots \times 2 \times 1$. Voorbeeld: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

**Volledig of gedeeltelijk?** Gebruik n! alleen wanneer alle n voorwerpen een plek krijgen. Bij een selectie van minder voorwerpen stop je het product na het gevraagde aantal plekken. Een speciale rekenmachinefunctie kan het rekenen versnellen als jouw school die toestaat; het uitgeschreven product laat altijd zien wat je telt. In voorbeeld 5.2B, blz. 452 zie je de volledige ordening en het effect van een vaste plek.

**Onthoud:** n! telt volledige ordeningen van n verschillende voorwerpen.

### 6 Een volledige rij

Zes verschillende werkstukken hebben de labels A tot en met F. Voor een tentoonstelling worden zij naast elkaar gezet op zes plekken in een rechte rij.

**a** Bereken het aantal volledige opstellingen. Noteer zowel de faculteit als het uitgeschreven product.

## 6 Een volledige rij (vervolg)

Zes verschillende werkstukken hebben de labels A tot en met F. Voor een tentoonstelling worden zij naast elkaar gezet op zes plekken in een rechte rij.

**b** Werkstuk C wordt vooraf weggehaald. De overige vijf werkstukken vullen vijf plekken in een rechte rij. Hoeveel opstellingen zijn mogelijk?

**c** Hoeveel keer zo groot is het antwoord bij a als bij b? Verklaar dit ook door werkstuk C aan een rij van vijf werkstukken toe te voegen.

## 7 Een paneel testen

Zeven verschillende handgeschilderde paneeltjes A tot en met G staan in een rechte rij. Een scanner leest hun labels van links naar rechts. Een complete test van één rij duurt 3 seconden.

**a** Een medewerker zegt: dezelfde zeven paneeltjes leveren steeds dezelfde scan op. Leg uit waarom die uitspraak niet klopt. Gebruik een verwisseling als voorbeeld.

**b** Hoeveel complete rijen kunnen met alle zeven paneeltjes worden gemaakt? Hoeveel minuten duurt het om elke rij één keer te testen?

# Begin met de voorwaarde

**Leerdoel**

Ik kan een geordende telvraag oplossen met een vaste plek of een eenvoudige voorwaarde.

**Theorie**

## Begin met de voorwaarde

**Een plek ligt vast** Staat een bepaald voorwerp op een vaste plek, dan is die keuze al gemaakt. Gebruik dit voorwerp nergens anders. Tel daarna hoeveel mogelijkheden de overige plekken hebben. Bij een volledige rij van vijf voorwerpen met één vast voorwerp orden je de vier overige: 4! = 24.

**Toegestane gevallen** Bij een voorwaarde zoals A of B op de eerste plek kun je de gevallen afzonderlijk tellen en optellen. Zorg dat een uitkomst niet in twee gevallen meetelt. Bij meerdere vaste plekken kun je die eerst invullen. Soms is het handig een verboden plek eerst te behandelen of verboden uitkomsten van alle uitkomsten af te trekken. Leg steeds uit waarom de overgebleven aantallen kloppen. In voorbeeld 5.2B, blz. 452 zie je hoe een vast voorwerp uit de beschikbare voorraad verdwijnt.

**Onthoud:** Een vast voorwerp telt als gebruikt, ook als zijn plek later in de rij staat.

### 8 Een vaste middenplek

Zes verschillende grafische symbolen A tot en met F zijn beschikbaar voor drie genummerde plekken op een etiket. Elk symbool mag maar één keer voorkomen.

**a** Symbool C staat vast op plek 2. Hoeveel etiketten zijn mogelijk?

**b** C staat nog steeds op plek 2. Bovendien mag D niet op plek 3 staan. Hoeveel etiketten zijn mogelijk?

### 9 Illustraties op drie schermen

Voor een tentoonstelling zijn negen verschillende kaartillustraties A tot en met I beschikbaar. Drie schermen staan op de plekken links, midden en rechts. Op elk scherm verschijnt één illustratie; een illustratie wordt binnen één opstelling niet herhaald.

**a** Hoeveel schermopstellingen zijn zonder verdere voorwaarde mogelijk?

**b** Illustratie E moet op het middelste scherm staan. Hoeveel schermopstellingen voldoen daaraan?

**c** Op het linker scherm moet A of B staan en op het rechter scherm C. Hoeveel schermopstellingen voldoen aan beide voorwaarden?

### 10 Voorwaarden aan een wandbord

Voor een wandbord zijn zeven verschillende bannerontwerpen A tot en met G beschikbaar. Vier ontwerpen worden naast elkaar geplaatst op plekken 1 tot en met 4. Een ontwerp mag maar één keer voorkomen.

**a** Op plek 1 staat A of B en op plek 4 staat D. Hoeveel wandborden voldoen aan beide voorwaarden?

**b** Er geldt nu alleen deze voorwaarde: A staat op plek 1 of op plek 4. Hoeveel wandborden zijn mogelijk?

### 11 Controleer de redenering

Hieronder staan drie losse redeneringen. In elke situatie zijn alle personen of voorwerpen verschillend en mogen zij niet worden herhaald.

**a** Uit vijf personen worden een penningmeester en een secretaris gekozen. Noor zegt: wie die twee personen zijn is genoeg; het omwisselen van hun rollen verandert de uitkomst niet. Leg haar fout uit met een concreet voorbeeld.

**b** Er zijn zes kandidaten voor drie verschillende rollen. Elke rol krijgt één persoon en niemand mag twee rollen krijgen. Ilias rekent $6 \times 6 \times 6 = 216$. Leg de fout uit en bereken het juiste aantal rolverdelingen.

**c** Vijf verschillende boeken komen in een rechte rij. Het atlasboek staat verplicht op plek 3. Yara rekent $5! = 120$. Leg de fout uit en bereken het juiste aantal rijen.

## 12 Een bewegingsreeks

Negen verschillende bewegingskaarten hebben de labels G1 tot en met G9. Een uitvoerder volgt de kaarten in de genoteerde volgorde. Een kaart mag in een reeks hoogstens één keer voorkomen.

**a** Een reeks begint met G1 en daarna G2. Een andere reeks begint met G2 en daarna G1. Zijn dit verschillende uitkomsten? Licht je antwoord toe.

**b** Hoeveel reeksen van twee kaarten zijn mogelijk?

**c** Hoeveel reeksen met alle negen kaarten zijn mogelijk? Geef een faculteit en een product bij je antwoord.

**d** Alle negen kaarten worden gebruikt en G4 staat op de derde plek. Hoeveel reeksen voldoen aan die voorwaarde?

## 13 Metalen emblemen

Elf verschillende metalen emblemen dragen de labels A tot en met K. Vier emblemen komen op de vier genummerde plekken van een wandbord. Een embleem wordt per wandbord maar één keer gebruikt.

**a** Hoeveel wandborden zijn zonder extra voorwaarden mogelijk?

**b** Op plek 1 staat A, B of C. Op plek 4 staat J of K. Hoeveel wandborden voldoen aan beide voorwaarden?

# 5.3 Kiezen en combinaties

**Leerdoel**

Ik kan bepalen of de volgorde bij een selectie meetelt en een geschikte teltechniek kiezen.

**Theorie**

## Maakt de volgorde verschil?

**Verzameling of plaatsen** Vraag eerst wat een nieuwe mogelijkheid oplevert. Als dezelfde gekozen leden in een andere volgorde nog steeds dezelfde keuze vormen, kies je een groep. Als de leden verschillende plaatsen, rollen of rangnummers krijgen, kan verwisselen een nieuwe mogelijkheid geven. Dan telt de volgorde mee. Geen herhaling betekent dat elk beschikbaar lid hoogstens één keer in de selectie zit.

**Een eerste groepstelling** Bij een paar zonder herhaling telt AB als hetzelfde paar als BA. Eerst geordend tellen levert ieder paar tweemaal op; daarom deel je door 2. In voorbeeld 5.3A, blz. 453 zie je bij drie leden hoe het verschil tussen een groep en genummerde plaatsen de telling verandert.

**Onthoud:** Een andere volgorde is alleen een nieuwe mogelijkheid als de plaatsen of rollen verschil maken.

### 1 Een paar of twee plaatsen

Zes verschillende proefstickers hebben de letters A, B, C, D, E en F. Voor een proefvel kies je twee stickers; de plek van een sticker op dit vel speelt geen rol. Een ander vel heeft een vak met het nummer 1 en een vak met het nummer 2. In elk vak komt één van de zes stickers; je gebruikt een sticker hoogstens één keer.

**a** Vergelijk de twee vellen. In welke situatie geeft het omwisselen van de twee gekozen stickers een nieuwe mogelijkheid? Leg uit.

## 1 Een paar of twee plaatsen (vervolg)

Zes verschillende proefstickers hebben de letters A, B, C, D, E en F. Voor een proefvel kies je twee stickers; de plek van een sticker op dit vel speelt geen rol. Een ander vel heeft een vak met het nummer 1 en een vak met het nummer 2. In elk vak komt één van de zes stickers; je gebruikt een sticker hoogstens één keer.

**b** Maak een volledige lijst van de mogelijke paren voor het proefvel. Begin elk paar met de letter die het eerst in het alfabet staat. Hoeveel paren zijn er?

**c** Bereken eerst het aantal invullingen van de genummerde vakken. Verklaar daarna hoe je hieruit het aantal paren vindt.

## 2 Een omslag voorbereiden

Een wijkkrant heeft acht verschillende foto's. De redactie kiest drie foto's als verzameling voor een omslag. Bij een ander ontwerp krijgen de drie foto's vaste plaatsen: boven, midden en onder.

**a** Leg voor beide ontwerpen uit of de volgorde meetelt en welke soort telling daarbij hoort. Je hoeft het aantal nog niet uit te rekenen.

**b** Drie gekozen foto's heten B, E en H. Schrijf alle mogelijke invullingen van boven, midden en onder met juist deze drie foto's op.

# Hoe vaak is dezelfde groep geteld?

**Leerdoel**

Ik kan verklaren waarom geordende selecties bij het kiezen van een groep tot dubbeltelling leiden.

**Theorie**

## Hoe vaak is dezelfde groep geteld?

**De interne volgorden** Kies r verschillende leden uit n. Als je de keuzevolgorde bijhoudt, heeft ieder vast gekozen groepje $r \times (r - 1) \times \ldots \times 1 = r!$ schrijfvolgorden. De leden zijn verschillend, dus alle r! volgorden zijn mogelijk en onderling verschillend. Elke ongeordende groep komt daardoor precies r! keer in de geordende telling voor. Deel door r! om elke groep eenmaal te tellen.

**Kijk naar de teller** Corrigeer voor de volgorden die je werkelijk hebt geteld. Tel je eerst twee leden uit categorie A en daarna één uit categorie B, dan kan in die telling alleen het tweetal uit A verwisselen. Je deelt die teller door 2!, niet door 3!. In voorbeeld 5.3A, Voorbeelden blz. 6 worden eerst alle drie leden geordend gekozen; daar hoort de deler 3! bij.

**Onthoud:** De deler corrigeert precies de volgorden die in de teller zijn meegeteld.

### 3 Een klein proefpakket

Een proefpakket bevat één connector uit drie verschillende connectors en twee filters uit vier verschillende filters. Alle voorwerpen zijn verschillend. Binnen het pakket hebben de filters geen vaste plek.

**a** Een pakket bevat connector K en filters F2 en F4. Je schrijft eerst K op en daarna de twee filters. Welke twee lijsten beschrijven hetzelfde pakket?

### 3 Een klein proefpakket (vervolg)

Een proefpakket bevat één connector uit drie verschillende connectors en twee filters uit vier verschillende filters. Alle voorwerpen zijn verschillend. Binnen het pakket hebben de filters geen vaste plek.

**b** Je telt eerst $3 \times 4 \times 3$ lijsten: connector, eerste filter, tweede filter. Waarom tel je elk pakket twee keer? Bereken het aantal verschillende pakketten.

**c** Bereken het aantal pakketten opnieuw door eerst het aantal filterparen te bepalen. Verklaar waarom je daarna vermenigvuldigt.

### 4 Dubbele bundels verwijderen

Een geluidsarchief heeft acht verschillende fragmenten. Een bundel bevat vier fragmenten en kent geen afspeelvolgorde. Een programma heeft alle keuzes van eerste, tweede, derde en vierde fragment opgeslagen, zonder een fragment te herhalen. Het programma heeft daardoor 1680 bestanden gemaakt.

**a** Verklaar waarom verschillende bestanden dezelfde bundel kunnen beschrijven.

**b** Hoeveel bestanden beschrijven één vast gekozen bundel? Verklaar je berekening.

**c** Het archief wil van elke bundel precies één bestand bewaren. Hoeveel bestanden blijven er over en hoeveel worden er verwijderd?

# Rekenen met combinaties

**Leerdoel**

Ik kan het aantal groepen van r uit n verschillende personen of voorwerpen berekenen zonder herhaling.

**Theorie**

## Rekenen met combinaties

**Notatie en berekening** C(n,r) betekent: het aantal groepen van r leden uit n verschillende leden, zonder herhaling en zonder volgorde. Voor $0 \le r \le n$ geldt $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Je kunt ook alleen de r dalende factoren gebruiken: $C(n,r) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!}$. De teller telt geordende selecties; de deler verwijdert de r! volgorden per groep. In voorbeeld 5.3A, blz. 453 worden deze teller en deler apart bepaald.

**Controleren en invoeren** Je kunt een rekenmachinefunctie voor combinaties gebruiken als de school dat in het PTA toestaat. Noteer altijd n, r en wat je telt. De producten en breuken geven dezelfde uitkomst zonder een merkgebonden functie. Controleer dat de uitkomst een geheel getal is. Een gekozen groep van r legt ook de n − r weggelaten leden vast: C(n,r) = C(n,n − r). Er is één lege groep en één groep met alle leden, dus C(n,0) = C(n,n) = 1; daarbij is 0! = 1.

**Onthoud:** C(n,r) telt groepen van verschillende leden: geen vaste plaatsen en geen herhaling.

### 5 Vergelijking van panelen

Negen verschillende paneelontwerpen zijn beschikbaar. Een onderzoeker kiest drie ontwerpen voor een vergelijking. De vergelijking kent geen eerste, tweede of derde plaats. Een presentatiewand heeft wel drie genummerde posities, elk met een verschillend ontwerp.

**a** Welke teltechniek past bij de vergelijking en welke bij de presentatiewand? Leg uit.

**b** Hoeveel verschillende vergelijkingen van drie ontwerpen zijn mogelijk?

**c** Hoeveel presentatiewanden zijn mogelijk? Verklaar het verschil met je antwoord op b.

## 6 Combinaties vergelijken

**a** Bereken C(6,2) en C(6,4). Leg uit waarom deze aantallen gelijk zijn.

**b** Bereken C(11,1) en C(11,0). Verklaar beide uitkomsten.

## 7 Een kleine expositie

Een drukker bezit twaalf verschillende miniatuurdrukken. Voor een expositie kiest zij vier drukken; hun onderlinge plaatsing wordt later bepaald en telt nu niet mee.

**a** Hoeveel keuzes van vier drukken zijn er?

**b** Zij kan ook bepalen welke acht drukken thuisblijven. Hoeveel keuzes van acht thuisblijvende drukken zijn er? Leg uit wat dit met a te maken heeft.

**c** Een lege expositie is ook een toegestane keuze. Hoeveel keuzes zijn er als geen enkele druk wordt getoond? Leg uit.

## 8 Alle materiaalsets testen

Tien verschillende sensorkapjes moeten worden vergeleken in sets van vier verschillende kapjes. Binnen een set tellen de posities niet mee. Voor iedere verschillende set wordt één testkaart gebruikt. Er zijn 220 testkaarten beschikbaar.

**a** Hoeveel verschillende sets moeten worden getest?

**b** Zijn er genoeg testkaarten om iedere set te testen? Bereken hoeveel kaarten overblijven of ontbreken.

**c** Een collega telt per test welke zes kapjes niet in de set zitten. Bereken daarmee opnieuw het aantal sets en verklaar waarom deze telling werkt.

### 9 Twee toegestane groepsgroottes

Een leesatelier heeft zeven verschillende korte teksten. Een bespreekpakket bevat twee of drie verschillende teksten. De volgorde binnen een pakket telt niet mee.

**a** Hoeveel verschillende bespreekpakketten zijn mogelijk?

**b** Waarom tel je de twee aantallen bij elkaar op en vermenigvuldig je ze niet?

### 10 Een verkeerde deler

Een leerling wil groepen van drie kiezen uit acht verschillende voorwerpen, zonder herhaling. De leerling schrijft: $C(8,3) = 8 \times 7 \times 6 \div 3 = 112$.

**a** Welke fout zit in de deler 3? Leg uit hoe vaak één groep in de teller voorkomt.

**b** Bereken het juiste aantal groepen.

**c** Een tweede leerling vervangt de teller door $8^3$ en deelt wel door 3!. Waarom is ook dat onjuist?

# Een voorgeschreven samenstelling

**Leerdoel**

Ik kan een groep met een eenvoudige samenstellingsvoorwaarde kiezen en de aantallen correct combineren.

**Theorie**

## Een voorgeschreven samenstelling

**Per categorie kiezen** Zijn er twee aparte categorieën en moet de groep precies u leden uit de eerste en v leden uit de tweede bevatten, kies dan eerst binnen iedere categorie. Bij a leden in de eerste en b in de tweede categorie is het aantal C(a,u) × C(b,v). Vermenigvuldigen mag hier omdat iedere toegestane groep uit de eerste categorie past bij iedere toegestane groep uit de tweede.

**Volgorden en verschillende gevallen** Binnen elk gekozen deelgroepje telt de volgorde niet mee. Een teller die eerst u leden uit de eerste categorie geordend kiest en daarna v uit de tweede, deel je door u! × v!. In voorbeeld 5.3B, blz. 455 zie je die correctie bij twee dunne en één breed penseel. Zijn meerdere verschillende samenstellingen toegestaan, tel dan de aantallen van de afzonderlijke samenstellingen op. Controleer dat die gevallen niet overlappen.

**Onthoud:** Kies per categorie een groep; vermenigvuldig de aantallen als iedere deelgroep bij iedere andere past.

### 11 De onderdelen van een demonstratie

Een demonstratie gebruikt twee verschillende mechanische modellen uit een verzameling van zes en één optisch model uit een aparte verzameling van vier. Binnen de demonstratie hebben de modellen geen genummerde plaatsen.

**a** Je noteert eerst het eerste mechanische model, daarna het tweede mechanische model en als laatste het optische model. Hoe vaak komt iedere demonstratie in zo'n geordende telling voor? Leg uit.

### 11 De onderdelen van een demonstratie (vervolg)

Een demonstratie gebruikt twee verschillende mechanische modellen uit een verzameling van zes en één optisch model uit een aparte verzameling van vier. Binnen de demonstratie hebben de modellen geen genummerde plaatsen.

**b** Hoeveel verschillende demonstraties zijn mogelijk?

**c** Iemand deelt $6 \times 5 \times 4$ door $3!$, omdat een demonstratie drie modellen bevat. Verklaar waarom dit hier niet klopt.

### 12 Een workshopgroep samenstellen

Een werkplaats heeft vijf verschillende kalligrafen en zeven verschillende boekbinders beschikbaar. Een workshopgroep bestaat uit twee kalligrafen en twee boekbinders. Alle vier doen mee als groepslid; er zijn geen vaste rollen.

**a** Telt de volgorde bij het kiezen van deze workshopgroep mee? Welke teltechniek past bij de keuze uit elke beroepsgroep?

**b** Hoeveel workshopgroepen zijn mogelijk?

**c** Nu krijgt elke beroepsgroep de rollen begeleider en assistent. Hoeveel ingevulde rolverdelingen zijn mogelijk? Verklaar het verschil met b.

## 13 Een klankinstallatie

Een depot heeft acht verschillende blaasinstrumenten en zes verschillende slaginstrumenten. Een klankinstallatie gebruikt vier verschillende instrumenten. De gekozen instrumenten vormen een verzameling zonder vaste rollen.

**a** Telt de volgorde bij het samenstellen van een installatie mee? Kies een geschikte teltechniek en leg uit.

**b** Iemand schrijft de vier gekozen instrumenten één voor één op en bewaart alle mogelijke schrijfvolgorden. Hoeveel lijsten horen bij één installatie? Verklaar dit.

**c** Hoeveel installaties zijn mogelijk als het aantal blaasinstrumenten en slaginstrumenten vrij is?

**d** Hoeveel installaties bestaan uit precies twee blaasinstrumenten en twee slaginstrumenten?

## 14 Metalen monsters

Een ontwerper heeft vier verschillende zilverkleurige monsters en negen verschillende koperkleurige monsters. Een proefset bevat drie verschillende monsters. De onderlinge plaats van de monsters telt niet mee.

**a** Hoeveel proefsets bevatten precies één zilverkleurig monster en twee koperkleurige monsters?

**b** Hoeveel proefsets bevatten beide kleuren?

# Herhaling

Verbind de telregels uit de drie paragrafen. Noteer steeds wat een verschillende uitkomst is en laat je berekening zien.

## 1 Een observatieavond

Een sterrenclub gebruikt eigen kaartjes en codes. De keuzeregels worden bij iedere vraag opnieuw gegeven.

**a** Een naamkaart bestaat uit één letter, K of L, gevolgd door één cijfer, 1, 2 of 3. Noteer alle mogelijke naamkaarten volledig en zonder dubbeltelling.

**b** Een andere code heeft drie cijferplaatsen. Je mag de cijfers 1, 2, 3 en 4 gebruiken; een code mag met elk van deze cijfers beginnen. Bereken het aantal codes wanneer een cijfer vaker mag voorkomen en wanneer elk cijfer hoogstens eenmaal mag voorkomen. Leg uit waarom je de aantallen per plaats mag vermenigvuldigen.

**c** Vier verschillende maanfasekaarten M1, M2, M3 en M4 worden alle precies eenmaal in een rij gelegd. Twee rijen zijn verschillend als ergens een andere kaart ligt. Bereken het aantal rijen met een faculteit en verklaar de berekening met een product.

## 2 Kaarten uit het atelier

In een atelier liggen acht verschillende kunstenaarskaarten A, B, C, D, E, F, G en H. Een kaart mag in een keuze hoogstens eenmaal voorkomen.

**a** Een rondleiding gebruikt drie kaarten op de plaatsen begin, midden en einde. Leg uit of de volgorde meetelt en bereken het aantal mogelijke rondleidingen.

**b** Bij een volgende rondleiding moet kaart C in het midden liggen. Er worden weer drie verschillende kaarten gebruikt. Hoeveel rondleidingen zijn nu mogelijk?

**c** De bezoeker kiest een bundel van drie van de acht kaarten. Alleen de drie gekozen kaarten tellen; de volgorde in de bundel niet. Bereken het aantal bundels en leg uit welke dubbeltelling je voorkomt.

## 3 Een zadenruil

Bij een zadenruil zijn vijf verschillende groentepakjes V1 tot en met V5 en vier verschillende bloemenpakjes B1 tot en met B4 beschikbaar. Elk pakje mag hoogstens eenmaal in een keuze voorkomen.

**a** Een ruilset bevat precies twee groentepakjes en precies twee bloemenpakjes. Alleen de inhoud telt. Hoeveel verschillende ruilsets zijn mogelijk?

**b** Een etiket heeft één vorm, rond, driehoekig of vierkant, en één kleur, groen, oranje, blauw of paars. Een driehoekig etiket mag niet oranje zijn; alle andere combinaties mogen wel. Bereken het aantal toegestane etiketten en controleer je telling op een andere manier.

**c** Drie verschillende pakjes worden achtereenvolgens getoond. V1 moet als eerste worden getoond. Voor de tweede en derde plaats mag elk van de andere acht pakjes worden gebruikt. Hoeveel presentaties zijn mogelijk?

## 4 Verhaalkaarten en markeringen

Een archief heeft zes verschillende verhaalkaarten P, Q, R, S, T en U. Daarnaast zijn er drie markeersymbolen R, S en T; deze symbolen staan los van de verhaalkaarten.

**a** Een lezer kiest drie van de zes verhaalkaarten voor een map. De volgorde in de map telt niet. Een leerling telt $6 \times 5 \times 4$ mogelijkheden. Verklaar waarom dit dezelfde map vaker telt en bereken het juiste aantal mappen.

**b** Een verteller gebruikt vier verschillende verhaalkaarten achter elkaar. Kaart U moet als laatste komen. Hoeveel verschillende verhalen zijn volgens deze regel mogelijk?

**c** Een markering heeft twee geordende plaatsen. Op elke plaats mag R, S of T staan, maar de twee symbolen mogen niet gelijk zijn. Noteer alle toegestane markeringen en controleer het aantal met twee berekeningen.

# Gericht herstel

Kies de opgave die past bij een fout in je eigen werk. De ondersteuning in de vragen helpt je om die fout te herstellen.

## 5 Een verkeerde codeberekening

Bij herstel onderzoek je een concrete fout. Gebruik de ondersteuning in de vragen om je redenering opnieuw op te bouwen.

**a** Een tweevakscode gebruikt de letters A, B en C. Een letter mag niet tweemaal in dezelfde code staan. Lina rekent $3 \times 3 = 9$. Schrijf boven elk van de twee vakken hoeveel letters nog beschikbaar zijn. Leg uit waar Lina verkeerd telt en schrijf daarna alle toegestane codes op.

**b** Een drievakscode gebruikt R, G, B en Y. Herhaling mag, en er moet minstens één Y voorkomen. Milan rekent $4 \times 3 \times 2$ omdat hij denkt dat na elke keuze een letter wegvalt. Maak eerst een rij met aantallen voor alle codes en een rij voor codes zonder Y. Gebruik het verschil. Controleer vervolgens door apart te tellen waar de eerste Y staat.

## 6 Hoeveel plaatsen zijn vrij?

Er zijn zes verschillende posters A, B, C, D, E en F. Op een wand zijn vier genummerde plaatsen. Een poster kan hoogstens eenmaal op de wand komen.

**a** Pim telt 6! = 720 wandindelingen. Teken vier lege plaatsen en zet erboven hoeveel posters bij iedere stap beschikbaar zijn. Verbeter zijn telling en leg uit waarom 6! bij deze wand niet past. Schrijf ook het product bij 6! op en benoem wat daarmee wél wordt geteld.

**b** Poster B moet nu op plaats 2 hangen. Pim rekent voor de andere plaatsen $5^3 = 125$. Vul eerst B op plaats 2 in en noteer bij de drie lege plaatsen de aantallen die na eerdere keuzes overblijven. Verbeter de berekening en benoem de fout.

## 7 Eén groep, veel volgorden

Er zijn vier verschillende snaarinstrumenten S1, S2, S3 en S4 en drie verschillende blaasinstrumenten W1, W2 en W3. Er wordt een groep van drie instrumenten gekozen; alleen de gekozen instrumenten tellen.

**a** Ravi berekent $7 \times 6 \times 5 = 210$ groepen. Schrijf de zes keuzevolgorden op voor de groep S1, S2 en W1. Gebruik dit om Ravi's berekening te verbeteren. Leg uit waarom jouw deelgetal voor iedere groep hetzelfde is.

**b** De groep moet precies één snaarinstrument en twee blaasinstrumenten bevatten. Lou telt $4 + 3 = 7$ groepen: vier mogelijke snaarinstrumenten en drie mogelijke blaasparen. Schrijf eerst de drie blaasparen op. Geef per blaaspaartje hoeveel volledige groepen je kunt maken, en verbeter Lou's berekening.

# Nieuwe controle

Maak deze nieuwe vragen zelfstandig. Laat bij berekeningen zien hoe je telt.

**8** **Controle: mogelijkheden en posities**

De zes situaties hieronder staan los van elkaar. Geef bij elke berekening je redenering.

**a** Op een bord liggen vier verschillende knopen A, B, C en D. Je kiest twee verschillende knopen; alleen het gekozen tweetal telt. Noteer alle mogelijke tweetallen volledig en zonder dubbeltelling.

**b** Een lunchkeuze bestaat uit één van twee broodsoorten, één van zes soorten beleg en één van drie dranken. Alle combinaties zijn toegestaan. Bereken het aantal lunchkeuzes en verklaar waarom je de aantallen mag vermenigvuldigen.

**c** Een drielettercode gebruikt de letters R, S, T, U, V en W. Elke letter mag hoogstens eenmaal voorkomen. Joris telt $6^3$ codes. Bereken hoeveel codes volgens de regel zijn toegestaan en hoeveel van de door Joris getelde codes niet zijn toegestaan.

**d** Een opbergkast heeft vier rijen A, B, C en D en drie kolommen 1, 2 en 3. Elk vak wordt aangeduid met zijn rij en kolom. Vakken in rij A en vakken in kolom 1 mogen niet worden gebruikt. Bereken hoeveel vakken wel mogen worden gebruikt en controleer dit met een andere aanpak.

**e** Acht verschillende leerlingen zijn beschikbaar voor twee verschillende rollen: interviewer en geïnterviewde. Eén leerling kan niet beide rollen krijgen. Hoeveel rolverdelingen zijn mogelijk?

**f** Vijf verschillende karretjes A, B, C, D en E staan in een rij. Karretje D moet op plaats 3 staan en A moet vóór B staan. Hoeveel rijen voldoen aan beide voorwaarden?

## 9 Controle: ordenen en groeperen

De zes situaties hieronder staan los van elkaar. Alle genoemde personen en voorwerpen zijn onderling verschillend. Een persoon of voorwerp mag binnen een keuze hoogstens eenmaal voorkomen.

**a** Zes verschillende kaarsen zijn beschikbaar. Voor tafel A komen twee kaarsen op de gemarkeerde plaatsen links en rechts. Voor tafel B worden twee kaarsen gekocht en samen in een mand gelegd; alleen de inhoud van de mand telt. Leg voor beide tafels uit of het verwisselen van de twee gekozen kaarsen een nieuwe uitkomst geeft.

**b** Zes verschillende bordjes P, Q, R, S, T en U passen op zes genummerde haken. Bordje P hangt al aan haak 4 en blijft daar. Alle andere bordjes worden opgehangen. Bereken het aantal mogelijke indelingen met een faculteit en verklaar deze met een product.

**c** Een ontwerper heeft acht verschillende stempels. Hij kiest er vijf voor een werkdoos en laat de overige drie in een kast. Alleen welke stempels in de werkdoos liggen telt. Leg uit of de volgorde meetelt, kies een passende telwijze en bereken het aantal mogelijke werkdozen.

**d** Een bestand bevat alle 360 geordende selecties van vier uit zes verschillende tekens. Bij de uiteindelijke groep telt de volgorde niet. Ena deelt 360 door 4, omdat elk teken van een groep als eerste kan staan. Beoordeel Ena’s redenering en bereken het juiste aantal groepen.

**e** Voor een park zijn twaalf verschillende boomsoorten voorgesteld. Het definitieve soortenplan bevat precies negen daarvan; alleen welke soorten worden gekozen telt. Bereken het aantal mogelijke soortenplannen.

**f** Een leeskrat wordt gevuld met drie verschillende boeken uit vijf verschillende verhalenboeken en vier verschillende informatieboeken. Er moet minstens één informatieboek in de krat zitten; alleen de inhoud telt. Hoeveel leeskratten voldoen aan de regel?

# Leerdoelen en eindevaluatie

Noteer per leerdoel wat lukt en wijs bewijs aan in je werk. Kies één volgende oefenstap.

Oefen gericht met herhaling of herstel en maak daarna een nieuwe controle.

- Wat beheers ik al?
- Welke aanpak hielp mij?
- Wat wil ik verbeteren?
- Waar zie ik een betekenisvolle toepassing van tellen?

5.1 · Leerdoel 1: Ik kan alle mogelijkheden volledig en zonder dubbeltelling ordenen in een lijst, rooster of boomdiagram.

5.1 · Leerdoel 2: Ik kan de productregel gebruiken bij opeenvolgende keuzes en uitleggen waarom ik de aantallen mag vermenigvuldigen.

5.1 · Leerdoel 3: Ik kan tellen met en zonder herhaling en de juiste aantallen per keuzestap gebruiken.

5.1 · Leerdoel 4: Ik kan een eenvoudige beperking verwerken en mijn telling met een tweede aanpak controleren.

5.2 · Leerdoel 1: Ik kan uit een situatie bepalen of verschillende volgorden verschillende uitkomsten opleveren.

5.2 · Leerdoel 2: Ik kan geordende selecties zonder herhaling tellen met een product van afnemende aantallen.

5.2 · Leerdoel 3: Ik kan bij een volledige ordening de faculteit gebruiken en verklaren met een uitgeschreven product.

5.2 · Leerdoel 4: Ik kan een geordende telvraag oplossen met een vaste plek of een eenvoudige voorwaarde.

5.3 · Leerdoel 1: Ik kan bepalen of de volgorde bij een selectie meetelt en een geschikte teltechniek kiezen.

5.3 · Leerdoel 2: Ik kan verklaren waarom geordende selecties bij het kiezen van een groep tot dubbeltelling leiden.

5.3 · Leerdoel 3: Ik kan het aantal groepen van r uit n verschillende personen of voorwerpen berekenen zonder herhaling.

5.3 · Leerdoel 4: Ik kan een groep met een eenvoudige samenstellingsvoorwaarde kiezen en de aantallen correct combineren.

# Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

| Toetsvraag | Leerdoel | Oefen opnieuw | Controleer |
|---|---|---|---|
| Test jezelf opgave 10a | Mogelijkheden volledig opschrijven | Gericht herstel opgave 5a | Nieuwe controle opgave 8a |
| Test jezelf opgave 10b–d | Productregel, herhaling en beperking met tweede telling | 5.1 opgave 4a–c; Gericht herstel opgave 5a–b | Nieuwe controle opgave 8b–d |
| Test jezelf opgave 11a–b | Volgorde en geordende selectie zonder herhaling | 5.2 opgave 2a–b; Gericht herstel opgave 6a | Nieuwe controle opgave 9a; Nieuwe controle opgave 8e |
| Test jezelf opgave 11c–d | Faculteit en vaste plekken | Gericht herstel opgave 6a–b | Nieuwe controle opgave 9b; Nieuwe controle opgave 8f |
| Test jezelf opgave 12a–c | Combinaties en dubbeltelling | Gericht herstel opgave 7a | Nieuwe controle opgave 9c–e |
| Test jezelf opgave 12d | Groep met samenstellings voorwaarde | Gericht herstel opgave 7b | Nieuwe controle opgave 9f |

# Voorbeeld 5.1A

## Alle eindtakken in beeld

Een klein display heeft een linker en een rechter vak. In elk vak kies je een teken uit A, C en F. Dezelfde letter mag niet in beide vakken staan. AC en CA zijn verschillend omdat de plaatsen verschillen.

**a** Hoeveel displays zijn mogelijk? Geef een volledig overzicht en verklaar waarom de telling compleet is.

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal verschillende links-rechtsdisplays met twee verschillende letters.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De verzameling is klein. Ik orden daarom per eerste letter en schrijf daarna alle toegestane tweede letters op. Zo kan ik zien of een eindtak ontbreekt of dubbel staat.

### 3. Berekening

Na A volgen C en F, na C volgen A en F, en na F volgen A en C. Dat geeft AC, AF, CA, CF, FA en FC: $2 + 2 + 2 = 6$.

| Eerste keuze | Mogelijke eindtakken | Aantal |
|---|---|---|
| A | AC en AF | 2 |
| C | CA en CF | 2 |
| F | FA en FC | 2 |

### 4. Antwoord in context

Er zijn 6 verschillende displays. De volgorde van de letters telt mee.

### 5. Controle

Elke eerste letter komt precies eenmaal als groep voor en heeft beide andere letters als vervolg. Er zijn geen gelijke paren. Omkeren verandert de plaatsen, dus AC en CA mogen allebei meetellen.

# Voorbeeld 5.1B

## Vermenigvuldigen en uitsluiten

Een startplaatje heeft achter elkaar een letter, een vorm en een cijfer. Je kiest de letter K, L of M, de vorm driehoek of cirkel en een cijfer uit 1, 2, 3 en 4. De onderdelen hebben vaste rollen; letter, vorm en cijfer worden niet omgewisseld.

**a** Iedere combinatie is toegestaan. Hoeveel startplaatjes zijn mogelijk?

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal volledige keuzes van een letter, een vorm en een cijfer.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de productregel: na elk van de 3 letters zijn beide vormen beschikbaar en na elke letter-vormcombinatie zijn alle 4 cijfers beschikbaar. De aantallen vervolgkeuzes zijn overal gelijk.

### 3. Berekening

$3 \times 2 \times 4 = 24$.

### 4. Antwoord in context

Er zijn 24 verschillende startplaatjes mogelijk.

### 5. Controle

Bij één letter zijn $2 \times 4 = 8$ plaatjes mogelijk. Er zijn drie letters, dus $8 + 8 + 8 = 24$. Dit geeft hetzelfde totaal.

# Voorbeeld 5.1B

## Vermenigvuldigen en uitsluiten

Een startplaatje heeft achter elkaar een letter, een vorm en een cijfer. Je kiest de letter K, L of M, de vorm driehoek of cirkel en een cijfer uit 1, 2, 3 en 4. De onderdelen hebben vaste rollen; letter, vorm en cijfer worden niet omgewisseld.

**b** Nu is bij letter M een cirkel verboden. Hoeveel startplaatjes blijven mogelijk? Controleer de telling met een andere aanpak.

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal startplaatjes dat na deze ene beperking nog is toegestaan.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik tel eerst alle 24 plaatjes en trek de verboden plaatjes af. Die verboden groep is duidelijk: M met een cirkel en een van de 4 cijfers. Daarna controleer ik door toegestane groepen per letter te tellen.

### 3. Berekening

Er zijn $1 \times 1 \times 4 = 4$ verboden plaatjes. Dus $24 - 4 = 20$. Per letter zijn er voor K en L elk $2 \times 4 = 8$, en voor M nog $1 \times 4 = 4$. Ook $8 + 8 + 4 = 20$.

| Letter | Toegestane vormen | Cijfers per vorm | Aantal |
|---|---|---|---|
| K | driehoek en cirkel | 4 | 8 |
| L | driehoek en cirkel | 4 | 8 |
| M | driehoek | 4 | 4 |

### 4. Antwoord in context

Met de beperking blijven 20 startplaatjes mogelijk.

### 5. Controle

De uitsluitmethode en de telling per letter geven beide 20. De groepen K, L en M overlappen niet en geen toegestane vorm is weggelaten.

# Voorbeeld 5.2A

## Drie geluidsfragmenten in een reeks

Zes verschillende geluidsfragmenten A tot en met F zijn beschikbaar. Een audiobericht heeft een openingsfragment, een middenfragment en een slotfragment. Elk fragment mag in een bericht maar één keer voorkomen.

**a** Leg uit waarom de volgorde van de fragmenten meetelt. Bereken daarna hoeveel audioberichten mogelijk zijn.

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal reeksen van drie verschillende fragmenten, met een opening, midden en slot.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De drie functies zijn verschillend: ABC en BAC zijn andere berichten. Ik kies daarom een geordende selectie zonder herhaling. Ik tel per positie de beschikbare fragmenten en vermenigvuldig die aantallen.

### 3. Berekening

Voor de opening zijn er 6 keuzes, voor het midden daarna 5 en voor het slot daarna 4. Het telproduct is $6 \times 5 \times 4 = 120$.

### 4. Antwoord in context

Er zijn 120 verschillende audioberichten; een ander fragment op een andere positie kan het bericht veranderen.

### 5. Controle

Het product heeft drie factoren, één per positie. Als controle: bij ieder van de 6 openingsfragmenten zijn er $5 \times 4 = 20$ vervolgparen, dus $6 \times 20 = 120$. Er komt nergens een fragment twee keer voor.

# Voorbeeld 5.2B

## Vijf beeldjes in een rechte rij

Vijf verschillende houten beeldjes heten A, B, C, D en E. Ze krijgen allemaal een plek in een rechte rij van vijf.

**a** Hoeveel rijen zijn zonder extra voorwaarde mogelijk? Hoeveel blijven er over als beeldje E op de middelste plek moet staan? Gebruik faculteiten en verklaar de producten.

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek eerst het aantal volledige rijen van vijf beeldjes en daarna het aantal met E op plek 3.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Zonder voorwaarde krijgen alle vijf verschillende beeldjes een plek; daarom gebruik ik 5!. Met E op plek 3 is E al gebruikt. Ik orden dan de vier andere beeldjes op de vier overige plekken met 4!.

### 3. Berekening

Zonder voorwaarde: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Met E op plek 3: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

### 4. Antwoord in context

Er zijn 120 volledige rijen. Daarvan hebben 24 beeldje E precies in het midden.

### 5. Controle

In alle 120 rijen bezet E elk van de vijf plekken even vaak. $120 \div 5 = 24$ bevestigt het beperkte aantal. Dat aantal is kleiner dan 120, zoals de extra voorwaarde vraagt.

# Voorbeeld 5.3A

## Dezelfde proefgroep, andere volgorde

Een keramist heeft zeven verschillende glazuurproeven. Hij kiest drie proeven als vergelijkingsgroep. De groep verandert niet als hij de proeven in een andere volgorde neerlegt. Een apart rek heeft drie genummerde plaatsen.

**a** Hoeveel vergelijkingsgroepen van drie proeven kan hij kiezen?

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal verschillende groepen van drie uit zeven glazuurproeven.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Alle proeven zijn verschillend en geen proef wordt herhaald. De volgorde telt niet mee. Ik tel eerst geordende selecties en deel door de 3! volgorden binnen één groep.

### 3. Berekening

Er zijn $7 \times 6 \times 5 = 210$ geordende selecties. Elke groep verschijnt $3! = 6$ keer. $C(7,3) = \frac{210}{6} = 35$.

### 4. Antwoord in context

De keramist kan 35 verschillende vergelijkingsgroepen maken.

### 5. Controle

Een vaste groep heeft 6 volgorden; $35 \times 6 = 210$, gelijk aan de geordende telling.

# Voorbeeld 5.3A

## Dezelfde proefgroep, andere volgorde

Een keramist heeft zeven verschillende glazuurproeven. Hij kiest drie proeven als vergelijkingsgroep. De groep verandert niet als hij de proeven in een andere volgorde neerlegt. Een apart rek heeft drie genummerde plaatsen.

**b** Hoeveel manieren zijn er om de drie genummerde plaatsen op het rek te vullen met verschillende proeven?

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal invullingen van drie onderscheiden plaatsen.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De plaatsen 1, 2 en 3 maken verschil. Na een keuze kan die proef niet opnieuw worden gebruikt. Daarom gebruik ik geordend kiezen zonder herhaling.

### 3. Berekening

Voor de drie plaatsen zijn er achtereenvolgens 7, 6 en 5 keuzes. Het aantal is $7 \times 6 \times 5 = 210$.

### 4. Antwoord in context

Het rek kan op 210 manieren worden gevuld.

### 5. Controle

Elke vergelijkingsgroep uit a geeft $3! = 6$ rekken. Ook $35 \times 6 = 210$.

# Voorbeeld 5.3B

## Een bakje met twee soorten penseel

Voor een restauratiebakje worden twee verschillende dunne penselen gekozen uit zes en één breed penseel uit vijf. Alle penselen zijn verschillend. De volgorde in het bakje speelt geen rol.

**a** Hoeveel verschillende restauratiebakjes kan men samenstellen?

### 1. Wat zoek ik?

Ik zoek het aantal bakjes met precies twee dunne penselen en één breed penseel.

### 2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De twee soorten vormen aparte categorieën. Binnen iedere categorie telt de volgorde niet mee. Ik kies daarom per categorie een groep en vermenigvuldig, omdat iedere dunne groep bij ieder breed penseel past.

### 3. Berekening

$C(6,2) = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ en $C(5,1) = 5$. Het aantal bakjes is $15 \times 5 = 75$.

### 4. Antwoord in context

Er kunnen 75 verschillende restauratiebakjes worden samengesteld.

### 5. Controle

Als ik eerst het eerste dunne, het tweede dunne en het brede penseel kies, krijg ik $6 \times 5 \times 5 = 150$ lijsten. Ieder bakje is alleen door het omwisselen van de dunne penselen tweemaal geteld: $150 \div 2 = 75$.