HOOFDSTUK 6

Veranderingen - SE

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

gemiddelde verandering en toenamediagrammen bepalen;
lokale verandering met een raaklijn benaderen;
stijgen, dalen en extrema beschrijven.

Wat weet je nog?

Maak deze vijf korte opgaven voordat je aan de nieuwe theorie begint. De antwoorden staan in Uitwerkingen.

1 Verschillen met een teken

a Bereken $-3 - (-11)$.

b Een waarde gaat van 14 naar 9. Geef het verschil eindwaarde min beginwaarde.

2 Eenheden en een formule

Voor een hoeveelheid geldt $H = 7 + 3t$, met t in minuten en H in liter.

a Bereken H bij $t = 4$.

b Hoeveel minuten zijn 150 seconden?

3 De helling van een lijn

Een lijn gaat door (1, 5) en (4, 17).

a Bereken de helling.

b Geef de formule van deze lijn.

4 Een klein verschil

Voor $H = 6 + t^2$ is t in minuten en H in cm.

a Bereken H bij $t = 2$ en $t = 2{,}1$.

b Bereken het verschil in tijd en in hoogte.

5 Een domein lezen

De formule $H = 12 + 2t$ geldt voor $0 \leq t \leq 5$ minuten.

a Welke twee tijdstippen zijn de randpunten van het domein?

b Bereken de waarden bij de randpunten.

6.1 Gemiddelde verandering en toenamediagrammen

Leerdoel

Ik kan toenemen, afnemen en constant blijven onderscheiden van positieve en negatieve waarden.

Theorie

Richting en teken

Een grootheid neemt toe als haar waarde groter wordt. Ook −8 naar −3 is een toename. Bij afnemen wordt de waarde kleiner; bij constant blijven verandert zij niet. Lees een grafiek van links naar rechts. Onder de horizontale as betekent een negatieve waarde, niet automatisch een afname. Het verschil eindwaarde min beginwaarde heet een differentie. Positieve differenties wijzen op een toename, negatieve op een afname. Een toenamediagram plaatst per gelijk tijdsinterval een staaf met dat verschil; een staaf kan dus onder nul staan.

Onthoud: Richting en teken van de waarde zijn twee verschillende vragen.

1 Onder nul en toch omhoog

De tabelwaarden zijn voor deze oefening samengesteld. Tussen opeenvolgende tijden verloopt de temperatuur rechtlijnig. Een toenamediagram toont per interval het verschil eindwaarde min beginwaarde.

t (uur)	T (°C)
0	-9
1	-5
2	-2
3	0

a Geef voor elk uur de verandering. Wat betekent het positieve teken?

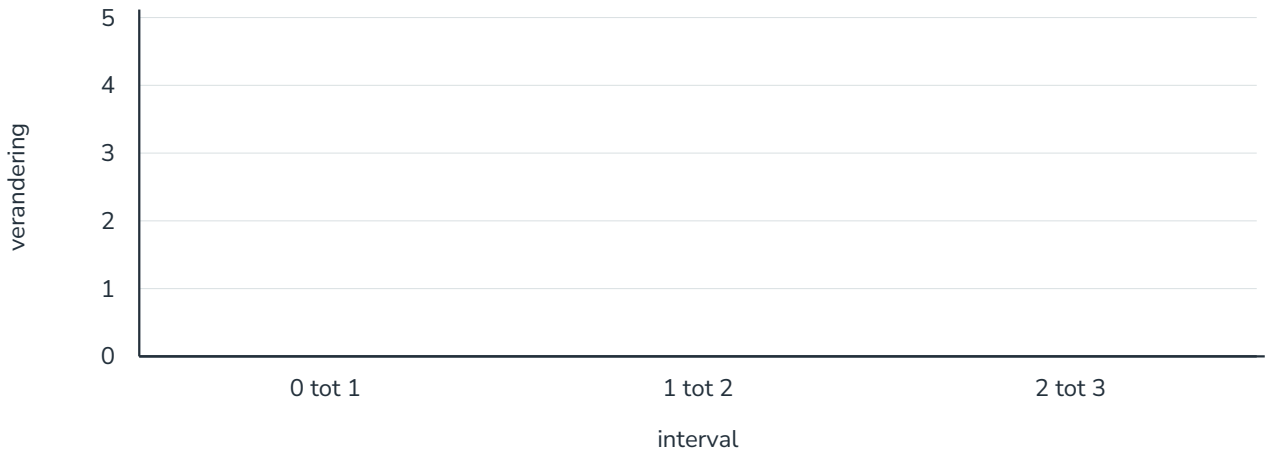
b Is de temperatuur vóór t = 3 positief? Is hij in die tijd stijgend? Leg beide antwoorden uit.

1 Onder nul en toch omhoog (vervolg)

De tabelwaarden zijn voor deze oefening samengesteld. Tussen opeenvolgende tijden verloopt de temperatuur rechtlijnig. Een toenamediagram toont per interval het verschil eindwaarde min beginwaarde.

t (uur)	T (°C)
0	-9
1	-5
2	-2
3	0

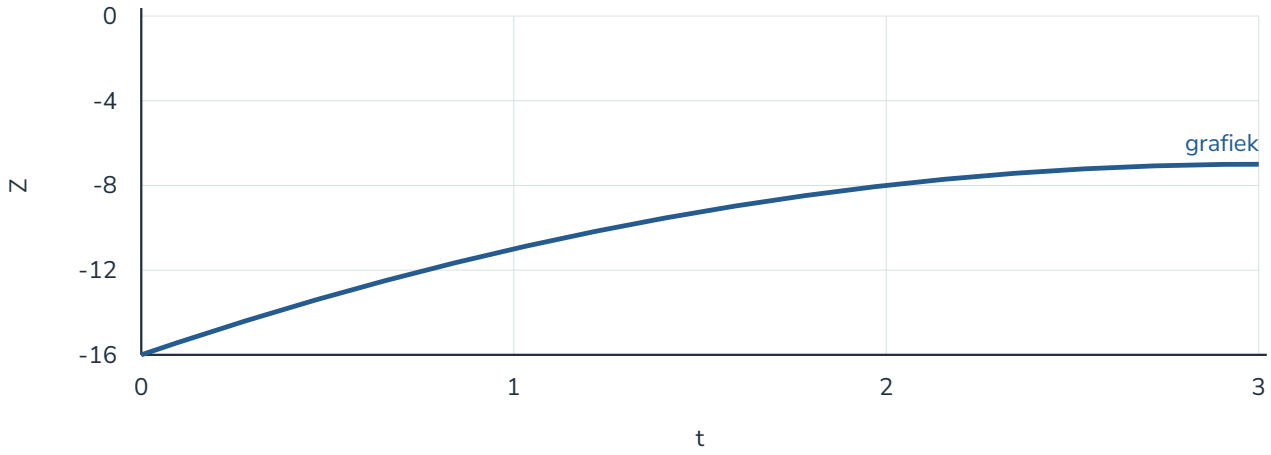
Verandering per interval



c Teken het toenamediagram voor de intervallen 0 tot 1, 1 tot 2 en 2 tot 3.

2 Waarden en richting

Voor $0 \leq t \leq 3$ geldt $Z = -16 + 6t - t^2$. Bekijk ook de grafiek.



a Is Z gedurende het hele domein negatief? Stijgt of daalt Z op dit domein?

b Bereken Z bij t = 0, 1, 2, 3. Wat gebeurt er met de toenamen per eenheid t?

Verandering per eenheid

Leerdoel

Ik kan een gemiddelde verandering berekenen en de juiste eenheid geven.

Theorie

Verandering per eenheid

De gemiddelde verandering is het verschil in uitkomst gedeeld door het verschil in invoer: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Neem x_2 groter dan x_1. De eenheid is die van de uitkomst per invoereenheid. Een gemiddelde vat een interval samen en zegt niet dat de verandering overal gelijk was. Bij gelijke intervallen kunnen de verschillen groeien of kleiner worden: positieve verschillen die kleiner worden zijn afnemende toename; negatieve verschillen die steeds negatiever worden zijn toenemende afname. Vergelijk bij ongelijke perioden veranderingen per eenheid, niet alleen de verschillen. Zie voorbeeld 6.1A, blz. 503.

Onthoud: Houd begin en einde in teller en noemer in dezelfde volgorde.

3 Een voorraad neemt af

Een voorraad verandert volgens $V = 40 - 2t - t^2$, voor $0 \le t \le 4$. t is in dagen en V in kg. Bij afnemende toename worden positieve verschillen kleiner; bij toenemende afname worden negatieve verschillen steeds negatiever.

a Bereken V(1) en V(4). Bepaal daarna de gemiddelde verandering van dag 1 tot dag 4.

b Bereken de veranderingen per dag vanaf dag 0. Neemt de voorraad steeds sneller of steeds langzamer af?

4 Niet alleen het verschil

Een wandelroute stijgt van 120 naar 192 meter hoogte tussen afstand 1,2 en 3,6 km.

a Bereken het hoogteverschil en het afstandsverschil.

b Bereken de gemiddelde hoogtetoename per km.

5 Twee ongelijke perioden

De oefengegevens beschrijven een hoeveelheid H in liter. Er is geen model voor tussenliggende tijden.

t (uur)	H (liter)
0	60
2	44
5	29

a Bereken de gemiddelde verandering van t = 0 tot 2 en van t = 2 tot 5.

b Bepaal de gemiddelde verandering over alle vijf uren. Leg uit waarom het gewone gemiddelde van −8 en −5 niet klopt.

6 Evenveel verschil, andere tijd

In periode A verandert een hoeveelheid van 20 naar 32 liter in 2 uur. In periode B verandert zij van 50 naar 62 liter in 3 uur.

a Vergelijk de totale veranderingen en de gemiddelde veranderingen.

b Welke periode heeft de grootste gemiddelde toename? Motiveer zonder de beginwaarden als argument te gebruiken.

7 Een ontbrekende meting

De gemiddelde verandering van t = 2 tot t = 6 is −3,5 cm per minuut. Bij t = 2 is de lengte 31 cm.

a Bereken de lengte bij t = 6.

b Bewijst deze gemiddelde verandering dat de lengte in elke minuut daalde?

8 Twee afvoeren vergelijken

Voor installatie A geldt $A = 80 - 6t + 0{,}4t^2$ voor $0 \leq t \leq 5$ minuten, in liter. Installatie B heeft 80 liter bij t = 0, 68 liter bij t = 2 en 53 liter bij t = 5. De B-waarden zijn voor de oefening samengesteld.

a Welke installatie heeft over de vijf minuten de grootste gemiddelde afname?

b Bereken voor B de gemiddelde veranderingen over de twee afzonderlijke perioden.

c Kun je uit de drie B-metingen concluderen dat B nergens tussentijds steeg?

Een toenamediagram lezen

Leerdoel

Ik kan bij gelijke intervallen een toenamediagram maken en uitleggen.

Theorie

Een toenamediagram lezen

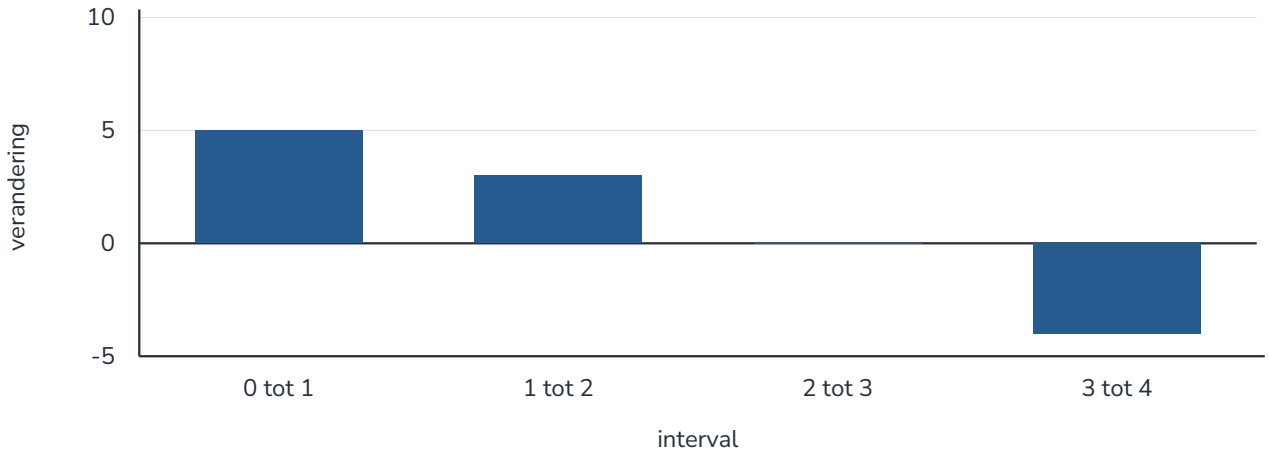
Kies gelijke intervallen. Bereken voor elk interval de eindwaarde min de beginwaarde. De staaf hoort bij dat hele interval; in dit boek staat het interval onder de staaf. Een nulverschil geeft een staaf van hoogte nul. De staafhoogte is een verandering, geen eindwaarde en geen verandering per uur tenzij het interval één uur duurt. Vanuit een beginwaarde kun je opeenvolgende verschillen optellen om de eindwaarden terug te vinden. Een diagram van metingen beschrijft de verschillen tussen meetmomenten; zonder model weet je het verloop daartussen niet. Zie voorbeeld 6.1B, blz. 504.

Onthoud: Gebruik gelijke intervallen voor het vergelijken van differenties.

9 Van diagram terug naar waarden

Elke staaf hoort bij één uur. De hoeveelheid is bij t = 0 gelijk aan 18 liter. Alle gegevens zijn samengesteld. Tussen de hele uren verloopt de hoeveelheid rechtlijnig.

Verandering per interval



a Reconstructeer H bij t = 1, 2, 3, 4.

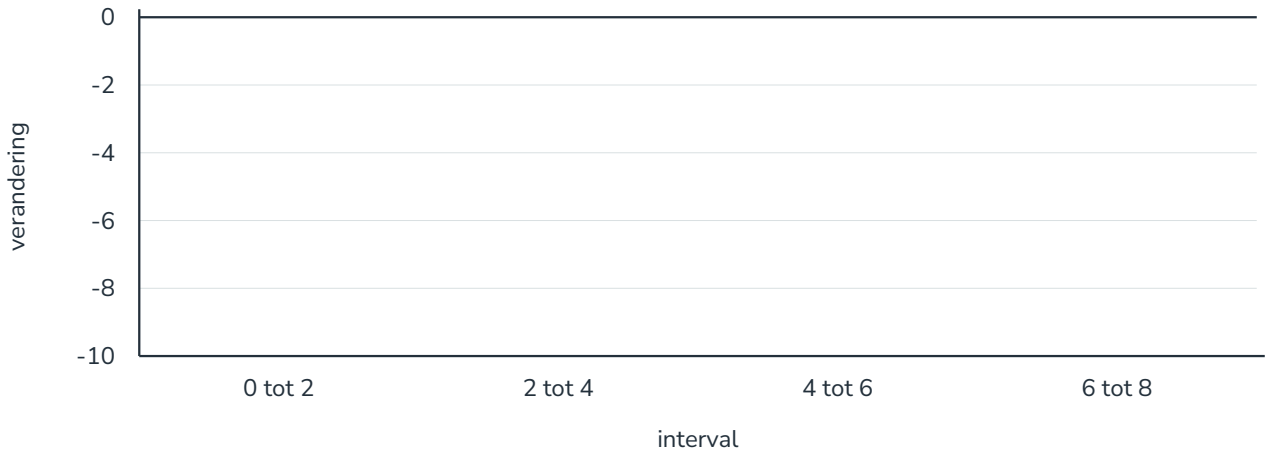
b Welke staaf hoort bij een constant gebleven hoeveelheid? Wat betekent de negatieve staaf?

10 Een warmtebuffer

De tabel is samengesteld. Tussen de metingen is geen verloopmodel gegeven. Maak een toenamediagram met per staaf het tijdsinterval van twee uur.

t (uur)	energie (kWh)
0	44
2	36
4	30
6	26
8	24

Verandering per interval



a Teken het toenamediagram voor de vier intervallen.

b Beschrijf het patroon van de gemeten afnamen. Bewijst dit dat de buffer voortdurend steeds langzamer afneemt?

11 Een weekbudget reconstrueren

Een budget heeft opeenvolgende dagveranderingen +12, −7, −9 en +4 euro. Na de vierde dag is het budget 35 euro.

a Bereken het budget vóór de eerste verandering.

b Bereken de vier dag-eindwaarden. In welke dag was de afname het grootst?

12 Ongelijke intervallen verwarren

Samengestelde meetwaarden zijn 10, 16, 28 en 46 liter bij t = 0, 1, 3 en 6 uur. Isa noemt +6, +12 en +18 toenemende groei per uur.

t (uur)	H (liter)
0	10
1	16
3	28
6	46

a Controleer de uitspraak met de drie gemiddelde veranderingen.

b Waarom vormen de drie verschillen geen eerlijk toenamediagram voor de vergelijking per uur?

c Is een rechte lijn door de meetpunten bewijs van een constant werkelijk verloop?

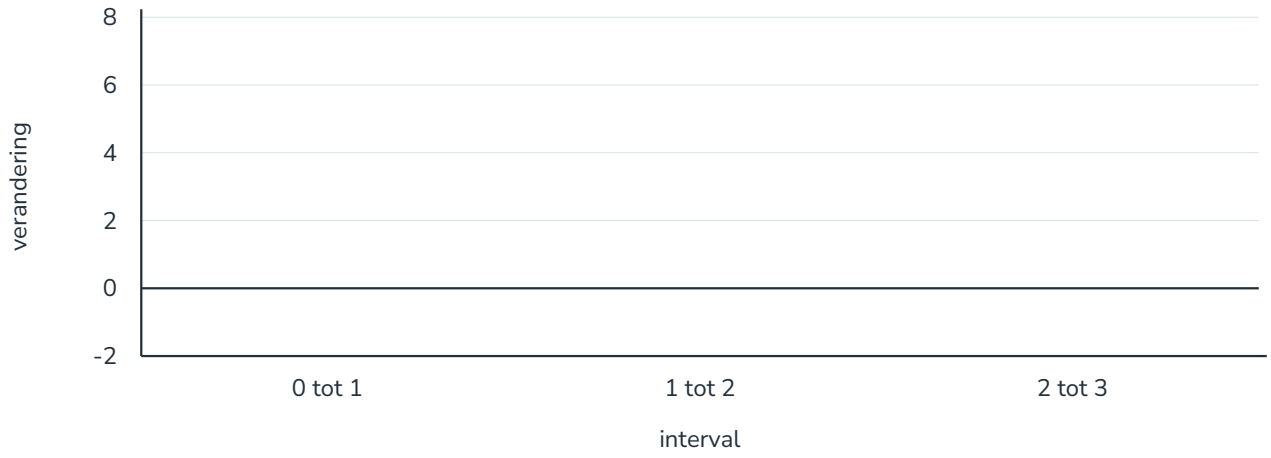
13 Negatieve meetwaarden

De waarden zijn samengesteld. Tussen opeenvolgende meetpunten wordt voor deze vraag rechtlijnig geïnterpoleerd.

t	F
0	-9
1	-5
2	1
3	-1

a Beschrijf teken en richting in de drie intervallen.

Verandering per interval



b Maak een toenamediagram.

Steeds sneller of langzamer

Leerdoel

Ik kan toenemende en afnemende toename of afname herkennen.

Theorie

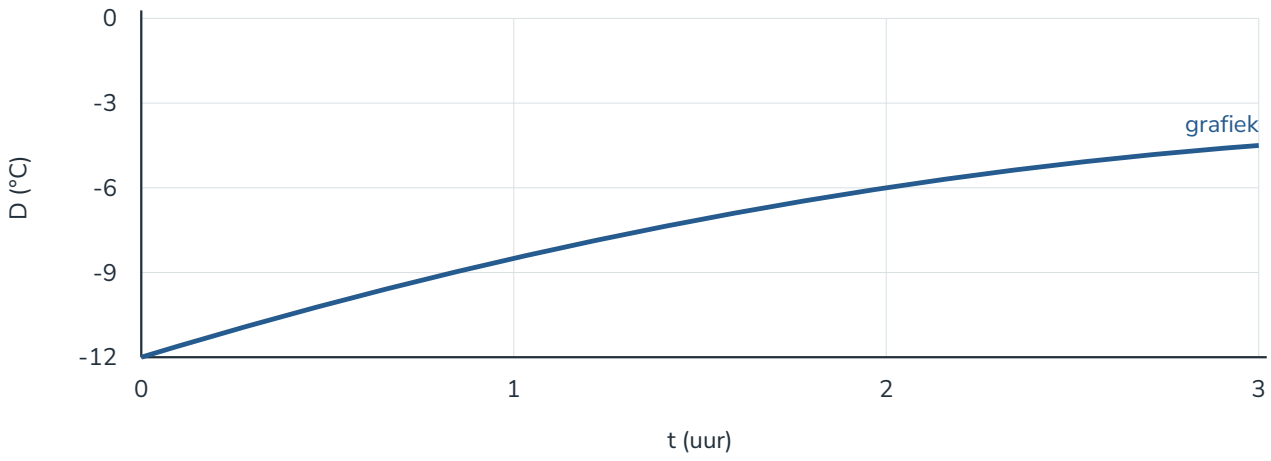
Steeds sneller of langzamer

Bij toenemende toename worden positieve verschillen groter. Bij afnemende toename worden ze kleiner. Bij toenemende afname worden negatieve verschillen verder van nul; bij afnemende afname schuiven ze naar nul. Gebruik steeds gelijke intervallen. In een vloeiende grafiek herken je het patroon aan de steilheid: die kan groeien of afnemen terwijl de grafiek stijgt of daalt. Een tabel met enkele meetwaarden bewijst niet hoe de grootheid zich op ieder tussenliggend moment gedraagt. Vermeld dus of je een modelgrafiek of alleen meetwaarden beschrijft.

Onthoud: Een verschil van −7 is een grotere afname dan een verschil van −3.

14 Een afwijking wordt kleiner

Een temperatuurafwijking D in °C volgt $D = -12 + 4t - 0{,}5t^2$ voor $0 \le t \le 3$ uur.



a Bereken D bij de vier gehele tijdstippen. Beschrijf teken en richting.

b Bepaal de drie uurverschillen. Beschrijf de soort verandering.

c Een technicus zegt: de afwijking wordt groter omdat de grafiek stijgt. Beoordeel dit.

15 Een meetmodel vergelijken

$M = 28 - 8t + 0{,}75t^2$ voor $0 \leq t \leq 4$ minuten. M is een afstand in cm.

a Bereken de gemiddelde verandering van t = 1 tot 4.

b Bereken de veranderingen in de eerste en de laatste minuut. Beschrijf wat dit zegt over de afname.

16 Het begin bepalen

Een hoeveelheid verandert per uur met +3, +5, +7 en +9 kg. Na vier uur is er 41 kg.

a Bereken de beginhoeveelheid en de gemiddelde verandering over vier uur.

b Beschrijf het patroon. Kun je de verandering van het vijfde uur zeker voorspellen?

6.2 Lokale verandering en helling

Leerdoel

Ik kan uitleggen waarom een kleiner interval helpt om een lokale verandering te benaderen.

Theorie

Een moment benaderen

Een gemiddelde hoort bij een interval. Een lokale verandering hoort bij één plaats of tijdstip. Bij een vloeiend model kun je dicht bij dat moment gemiddelde veranderingen berekenen over steeds kleinere intervallen. Gebruik een interval dat binnen het domein ligt en noteer je keuze. Waarden links en rechts kunnen helpen controleren of dezelfde lokale uitkomst aannemelijk is. Bij een domeinrand gebruik je alleen de toegestane kant. Bij afgeronde of onzekere metingen kunnen heel kleine verschillen verdwijnen; kleiner is dan niet automatisch nauwkeuriger. Zie voorbeeld 6.2A, blz. 506.

Onthoud: Een lokale benadering blijft herkenbaar aan het gebruikte interval.

1 Van groot naar klein interval

Voor $H = 4 + t^2$, $0 \le t \le 4$ minuten, is H in cm. Benader de verandering bij $t = 2$ vanuit de rechterkant.

a Bereken de gemiddelde verandering van 2 tot 3 en van 2 tot 2,1.

b Herhaal voor 2 tot 2,01. Welke lokale verandering ligt voor de hand?

c Waarom past het laatste interval beter bij de vraag naar het moment $t = 2$?

2 Links en rechts vergelijken

$S = 5 + 3t + 2t^2$ op $0 \le t \le 4$, met S in meter en t in seconde.

a Benader de lokale verandering bij $t = 1$ met 1 tot 1,1 en met 1 tot 1,01.

b Gebruik nu 0,99 tot 1. Vergelijk de drie uitkomsten.

c Is 7,02 de hoogte van de grafiek bij $t = 1$?

3 De rand van een domein

Een model geldt alleen voor $0 \leq t \leq 3$. Je zoekt de lokale verandering bij $t = 0$.

a Kun je een interval van $-0{,}01$ tot $+0{,}01$ gebruiken? Leg uit.

b Noem een geschikt klein interval en leg de keuze uit.

4 Een stijgende inhoud

Een tankmodel is $V = 12 + 5t + 0{,}5t^2$ voor $0 \leq t \leq 4$ minuten. V is in liter.

a Bereken $V(2)$ en de gemiddelde verandering van 0 tot 4.

b Benader de lokale verandering bij $t = 2$ met 2 tot 2,02.

c De twee veranderingen zijn bijna gelijk. Betekent dit dat de lokale verandering overal 7 is? Leg uit en vergelijk bij $t = 0$.

Raaklijn en hellingsdriehoek

Leerdoel

Ik kan een lokale verandering schatten met een raaklijn en hellingsdriehoek.

Theorie

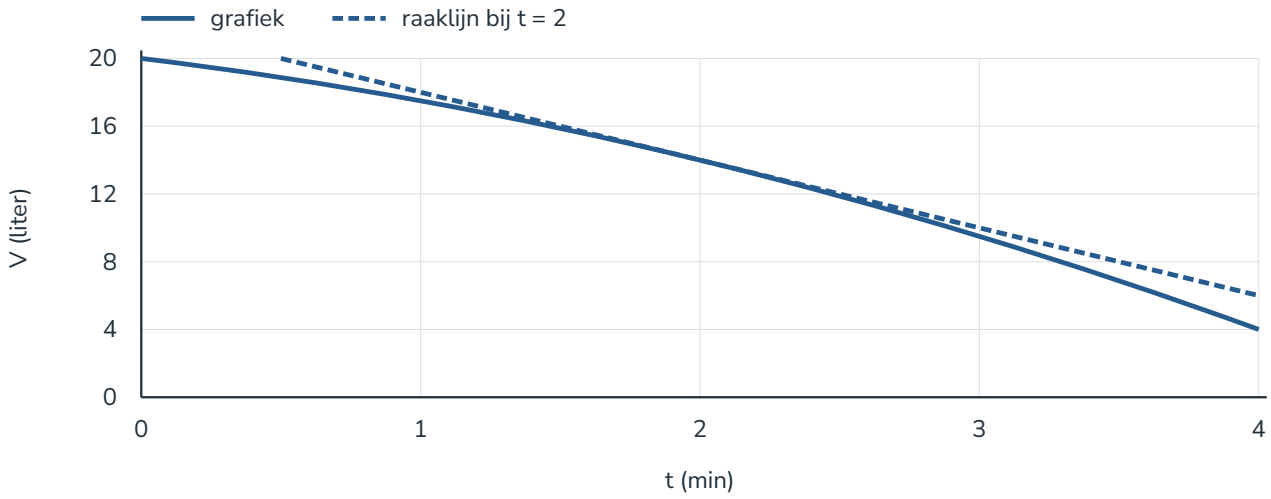
Raaklijn en hellingsdriehoek

Een raaklijn volgt bij het raakpunt de richting van een vloeiende grafiek. Haar helling benadert de lokale verandering. Teken de raaklijn ruim genoeg en kies twee goed afleesbare punten op die lijn. Maak een hellingsdriehoek: horizontaal het verschil in invoer, verticaal het verschil in uitkomst. Deel het verticale verschil door het positieve horizontale verschil. De gekozen punten hoeven niet beide op de oorspronkelijke curve te liggen. Behoud de eenheden van de assen en het teken. Grafisch aflezen geeft een schatting; de hoogte van de curve is een andere grootheid. Zie voorbeeld 6.2B, blz. 507.

Onthoud: Lees je twee punten op de raaklijn, niet willekeurig op de curve.

5 Een getekende raaklijn

De vloeiende grafiek toont V in liter. De gestreepte lijn is de raaklijn bij t = 2. Gebruik punten op die lijn, bijvoorbeeld (1,18) en (3,10).

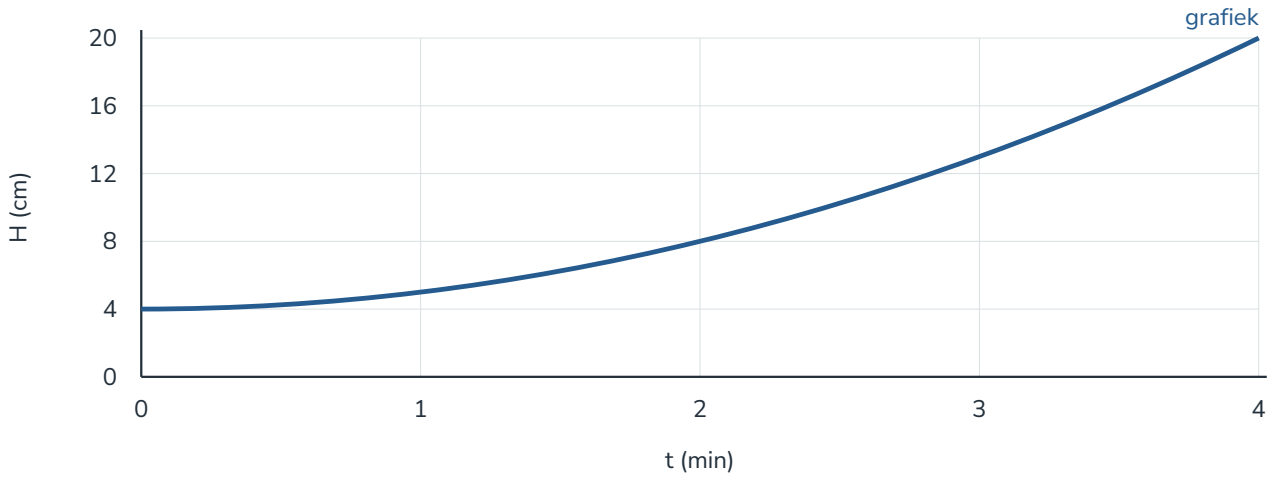


a Teken een hellingsdriehoek op de raaklijn en bereken de lokale verandering bij t = 2.

b Lees V bij t = 2 af. Leg het verschil uit tussen deze waarde en −4.

6 Zelf een raaklijn tekenen

De grafiek toont een hoogte H in cm. Er staat geen raaklijn in de figuur.

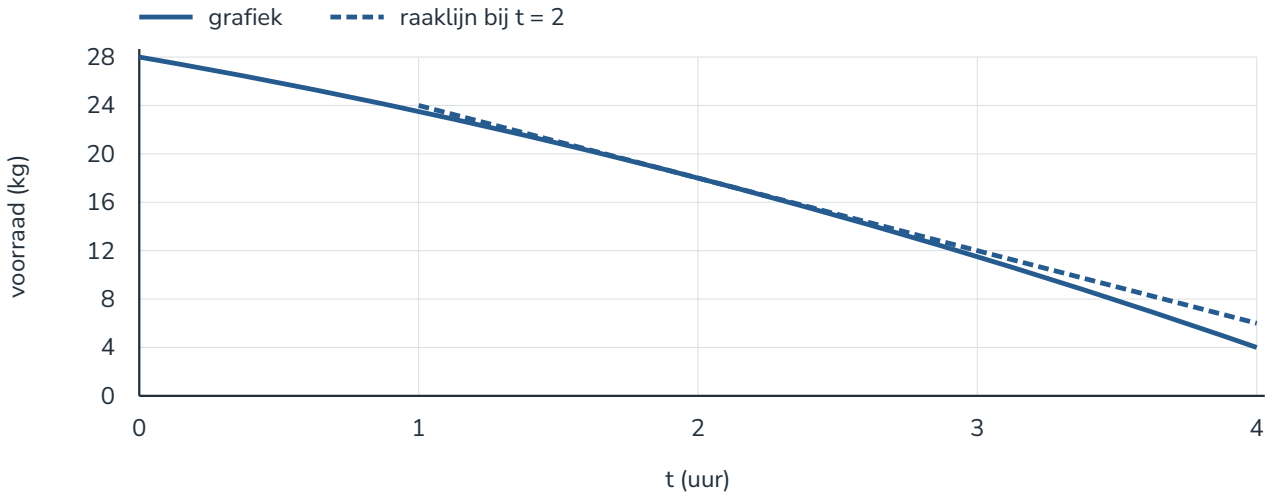


a Teken de raaklijn bij t = 2 en een ruime hellingsdriehoek. Schat de lokale verandering.

b Lees de hoogte bij t = 2. Leg uit wat het verschil is met je helling.

7 Een voorraad op één moment

De gestreepte lijn is de raaklijn aan de voorraadgrafiek bij t = 2 uur. Je mag de twee punten (1,24) en (3,12) op de raaklijn gebruiken.



a Teken een hellingsdriehoek en bepaal de lokale voorraadverandering bij t = 2.

b Moeten de twee gebruikte punten ook op de voorraadgrafiek liggen? Leg uit.

c Schat de voorraad bij t = 2 en beschrijf beide uitkomsten in de context.

Een formule of tabel gebruiken

Leerdoel

Ik kan een lokale verandering benaderen met een tabel of formule en interval en eenheid vermelden.

Theorie

Een formule of tabel gebruiken

Bereken twee uitkomsten dicht bij het gevraagde moment. Deel hun verschil door het invoerverschil. Een formule kan veel nauwkeurige waarden leveren; rond tussentijds zo weinig mogelijk af. Met een tabel hangt de nauwkeurigheid af van het beschikbare interval en de meetprecisie. Vermeld beide eindpunten en de eenheid van je benadering. Als alleen rechts of links waarden beschikbaar zijn, gebruik je die kant. Ga niet buiten het domein van het model. Je hoeft voor deze aanpak geen formule voor een afgeleide te bepalen.

Onthoud: Rond pas de berekende verandering af, niet de kleine invoerwaarden.

8 Dicht bij een meetmoment

De tabel is voor deze oefening samengesteld; de waarden zijn voldoende nauwkeurig om een lokale benadering te maken.

t (min)	H (cm)
2,9	11,41
3	12
3,1	12,61

a Benader de lokale verandering bij 3 minuten met het interval 2,9 tot 3,1.

b Waarom moet je bij deze uitkomst de intervalkeuze vermelden?

9 Afronding in meetgegevens

Een sensor rondt hoogte af op hele cm. Bij t = 2,00 en 2,01 minuut staat beide keren 17 cm. De gegevens zijn samengesteld.

a Welke gemiddelde verandering bereken je met de afgeronde waarden?

b Bewijst dit dat de werkelijke lokale verandering nul is?

10 Een lengte neemt af

$L = 36 - 3t - 0{,}5t^2$ voor $0 \leq t \leq 4$ minuten. L is in cm.

a Benader de lokale verandering bij t = 3 met 3 tot 3,01.

b Vergelijk met het gemiddelde over 0 tot 4. Welke uitkomst past bij de vraag naar t = 3?

11 Dicht bij de eindtijd

Een model voor een afstand is $A = 8 + t^2$ meter, alleen voor $0 \leq t \leq 2$ seconde.

a Benader de lokale verandering bij de eindtijd met een passend interval van lengte 0,01 seconde.

b Waarom is 2 tot 2,01 niet toegestaan met dit model?

De betekenis van de lokale verandering

Leerdoel

Ik kan een lokale verandering in de context uitleggen en onderscheiden van de waarde en een gemiddelde.

Theorie

De betekenis van de lokale verandering

Een hoogte, inhoud of afstand heeft de eenheid van de verticale as. Een verandering heeft die eenheid per horizontale eenheid. Een positieve lokale verandering betekent op dat moment toenemen; een negatieve betekent afnemen. Een helling van −3 liter per uur betekent dus niet dat er −3 liter aanwezig is. Een lokaal getekende raaklijn is evenmin een zekere voorspelling ver weg van het raakpunt. Een gemiddelde over een groot interval en een lokale verandering kunnen soms toevallig gelijk zijn, terwijl de verandering onderweg toch verschilt.

Onthoud: Noem het moment, de richting en de eenheid in je uitleg.

12 Hoogte en helling verwarren

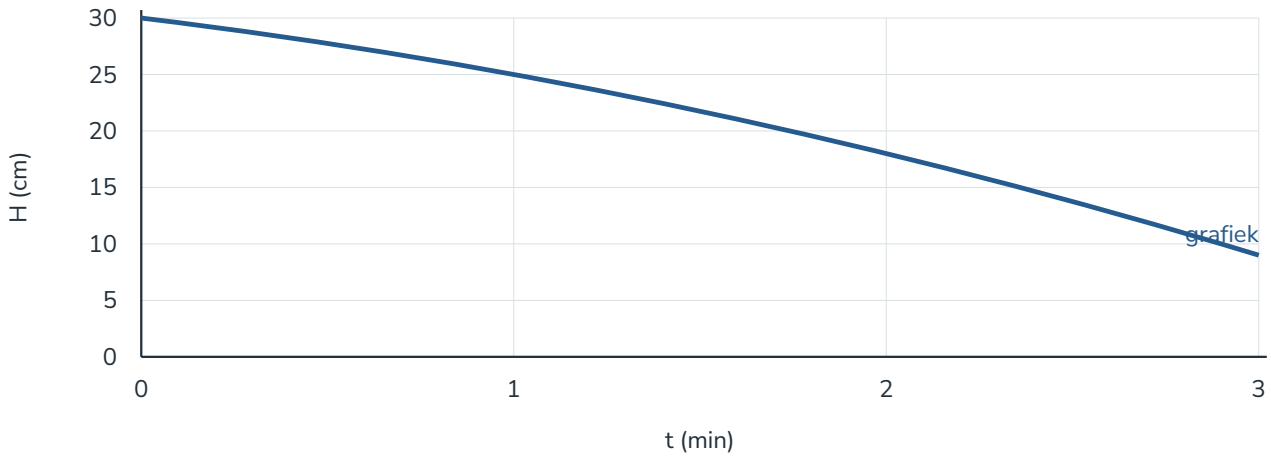
Op een tijdstip is een hoeveelheid 23 liter. De raaklijn gaat daar door (2,23) en (4,17), waarbij tijd in uren staat. Milan noemt de lokale verandering 23 liter per uur.

a Verbeter de berekening en de interpretatie.

b Voorspelt de raaklijn dat de werkelijke hoeveelheid twee uur later precies 17 liter is?

13 Een hoogte controleren

$H = 30 - 4t - t^2$ voor $0 \le t \le 3$ minuten. H is in cm.



a Teken bij t = 1 een raaklijn met hellingsdriehoek en schat de lokale verandering.

b Benader dezelfde lokale verandering met 1 tot 1,01. Vermeld interval en eenheid.

c Leg uit waarom dit kleine interval beter bij het tijdstip past dan 0 tot 3.

d Geef de hoogte bij t = 1, de gemiddelde verandering van 0 tot 3 en de betekenis van je lokale uitkomst.

14 Welke uitspraak past?

Voor een afstand in meter en tijd in seconden gelden de samengestelde gegevens hieronder.

t (s)	afstand (m)
3,9	24,41
4	25
4,1	25,61

a Benader de lokale verandering bij t = 4 met het hele tabelinterval.

b Kies de juiste interpretatie en motiveer: de afstand is 6 m; de afstand neemt daar ongeveer 6 m per seconde toe; de afstand is na één seconde zeker 31 m.

6.3 Extrema en verloop

Leerdoel

Ik kan de intervallen aangeven waarop een grootheid stijgt of daalt.

Theorie

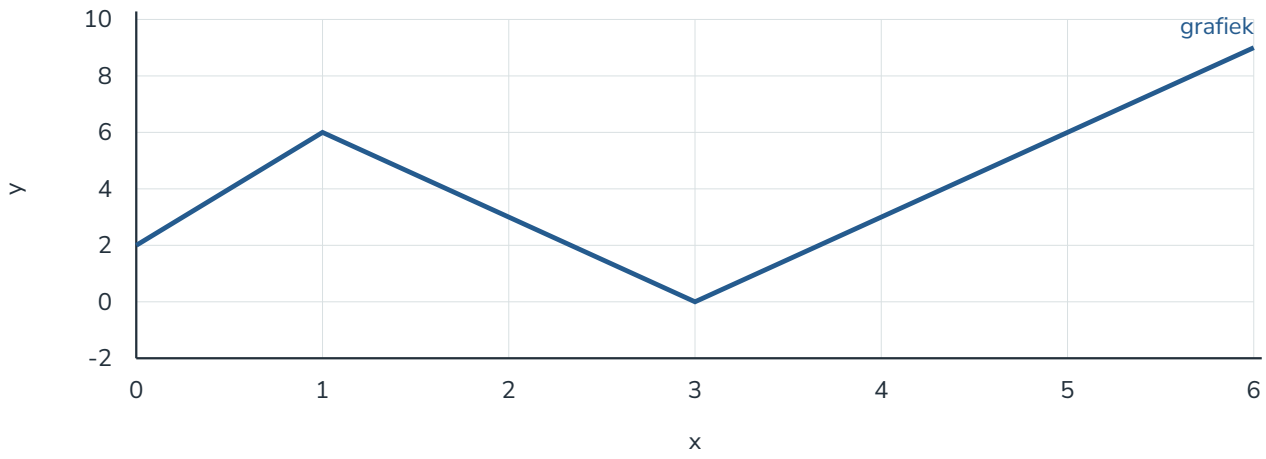
Intervallen van stijgen en dalen

Lees een grafiek van links naar rechts. Geef bij een verloopbeschrijving de grenspunten van ieder stijgend, dalend of constant interval. Een top binnen het domein heeft stijgen vóór en dalen erna; een dal heeft dalen vóór en stijgen erna. Dat heet een lokaal maximum of minimum. Voor de grootste en kleinste waarde op het hele domein vergelijk je ook de randpunten. Bij rechte lijnstukken volgt het verloop exact uit de gegeven punten. Losse meetwaarden beschrijven alleen de meetmomenten, tenzij een verloop tussen de punten is afgesproken. Zie voorbeeld 6.3A, blz. 508.

Onthoud: Een interval beschrijft invoerwaarden; een extremum heeft ook een uitkomstwaarde.

1 **Een grafiek verandert van richting**

De grafiek bestaat precies uit rechte lijnstukken. Het domein is $0 \leq x \leq 6$. Gebruik de richting van de lijnstukken om de vragen te beantwoorden.

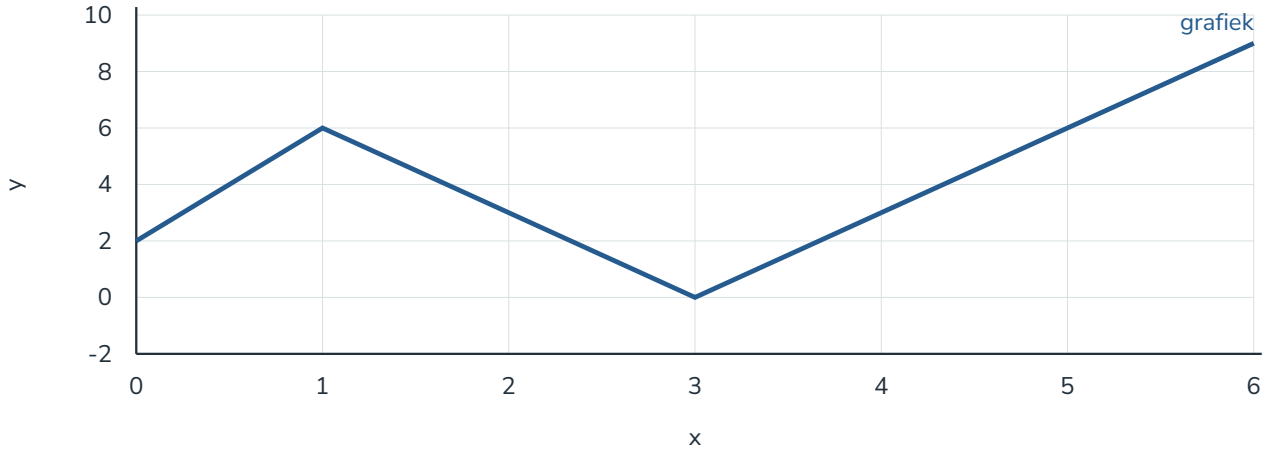


a Geef de stijgende en dalende intervallen.

b Geef de lokale toppen en dalen binnen het domein.

1 Een grafiek verandert van richting (vervolg)

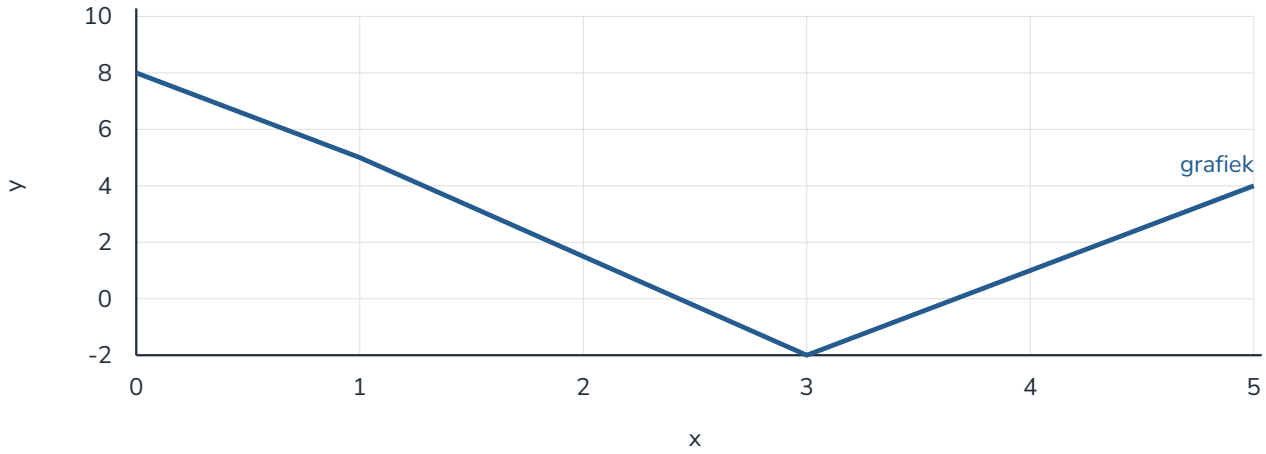
De grafiek bestaat precies uit rechte lijnstukken. Het domein is $0 \leq x \leq 6$. Gebruik de richting van de lijnstukken om de vragen te beantwoorden.



c Geef de grootste en de kleinste waarde op het hele domein.

2 De randpunten tellen mee

De grafiek bestaat uit de weergegeven rechte lijnstukken, op $0 \leq x \leq 5$.

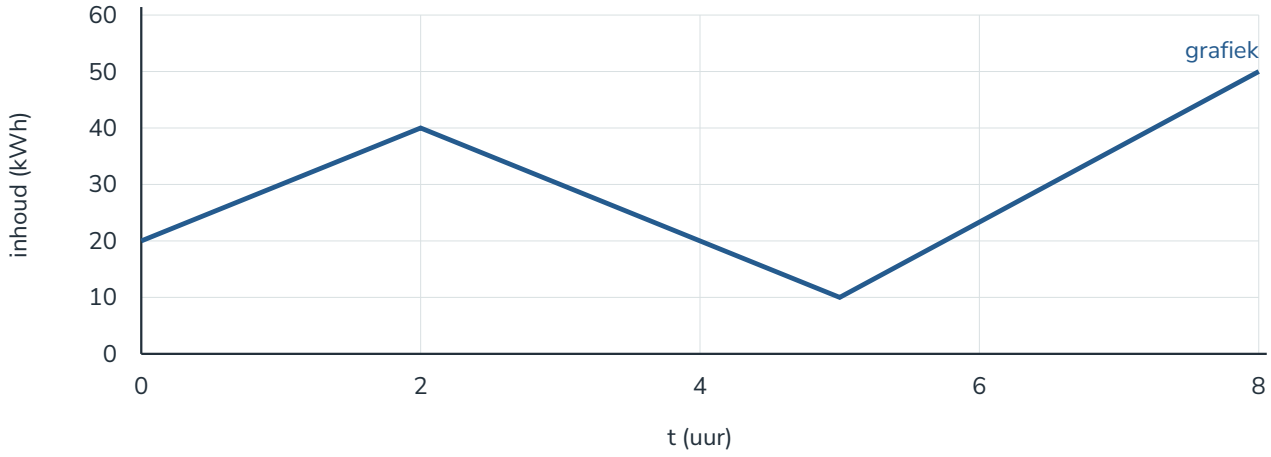


a Geef de stijgende en dalende intervallen.

b Bepaal de grootste en de kleinste waarde. Vergelijk met de lokale extrema binnen het domein.

3 Een buffer gedurende een dienst

De bufferinhoud volgt exact de rechte lijnstukken in de grafiek, met tijd t in uren en inhoud in kWh.



a Beschrijf het verloop met de juiste intervallen en omslagpunten.

b Welke periode bevat een constante inhoud? Wat betekent het dat de inhoud op t = 5 positief is?

c Is de lokale top ook de hoogste inhoud tijdens de dienst?

Een omslag herkennen

Leerdoel

Ik kan lokale maxima en minima herkennen aan een omslag tussen stijgen en dalen.

Theorie

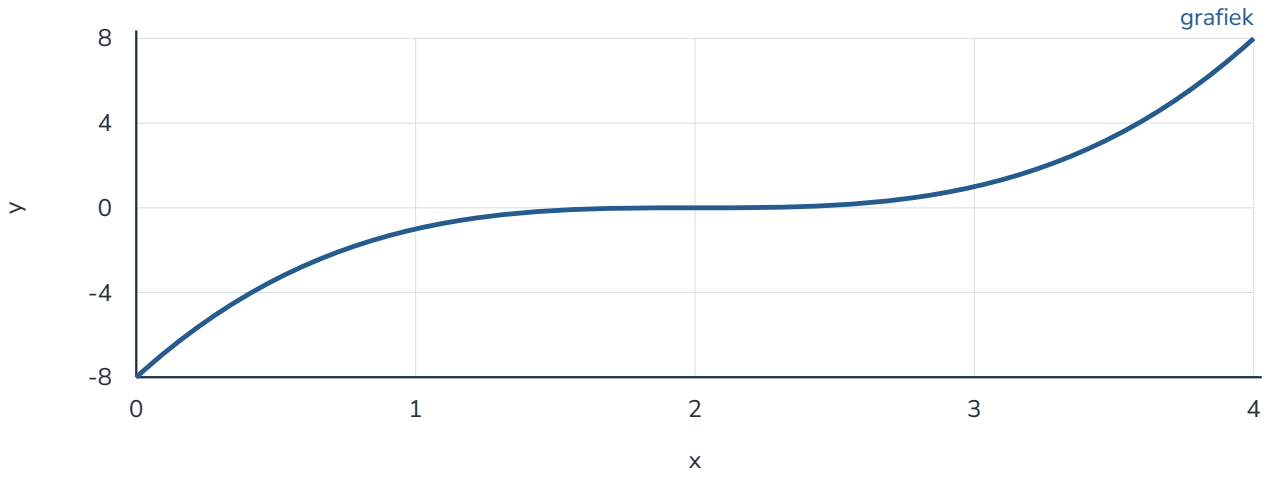
Een omslag herkennen

Een lokaal extremum binnen het domein herken je aan een verandering van richting. Stijgen naar dalen geeft een lokaal maximum; dalen naar stijgen een lokaal minimum. Bij een vloeiende top of dal kan de raaklijn horizontaal zijn. Het omgekeerde geldt niet altijd: een grafiek kan ook met een horizontale raaklijn blijven stijgen. Bij een hoekpunt kan de grafiek wel van richting wisselen zonder één gezamenlijke raaklijn. In dit hoofdstuk noemen we randpunten geen lokale omslagpunten; ze tellen wel mee bij de grootste en kleinste waarde op een gesloten domein.

Onthoud: Horizontaal alleen is geen bewijs van een extremum.

4 **Vlak is niet altijd een top**

Bekijk de vloeiende grafiek van $y = (x - 2)^3$ voor $0 \le x \le 4$. Bij $x = 2$ is de raaklijn horizontaal.

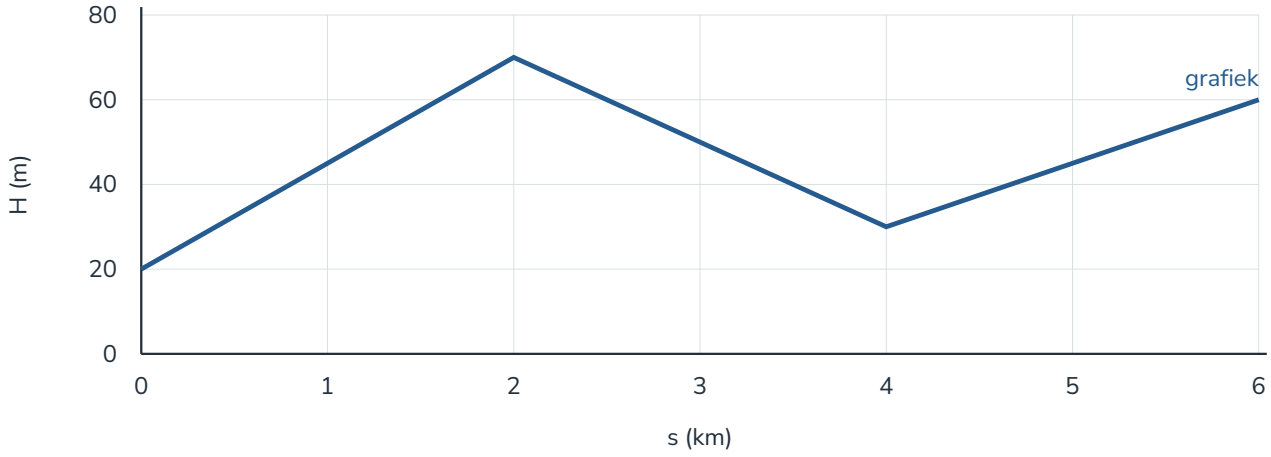


a Stijgt of daalt de grafiek aan beide kanten van $x = 2$?

b Is (2,0) een lokaal extremum? Leg uit.

5 Een parcoursprofiel

Een hoogteprofiel bestaat exact uit rechte lijnstukken door de gegeven punten. Afstand s is in km en hoogte H in meter.

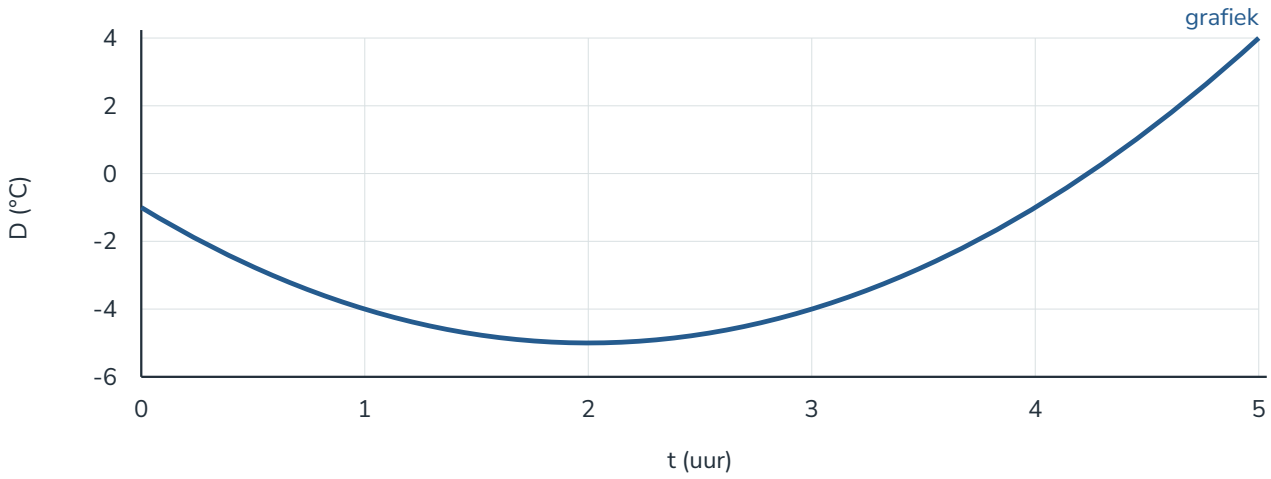


a Geef de lokale maxima en minima binnen het domein.

b Beschrijf het hele verloop met intervallen en betekenis.

6 Een laag punt onder nul

Een afwijking $D = (t - 2)^2 - 5$ geldt voor $0 \leq t \leq 5$ uur. D is in °C.

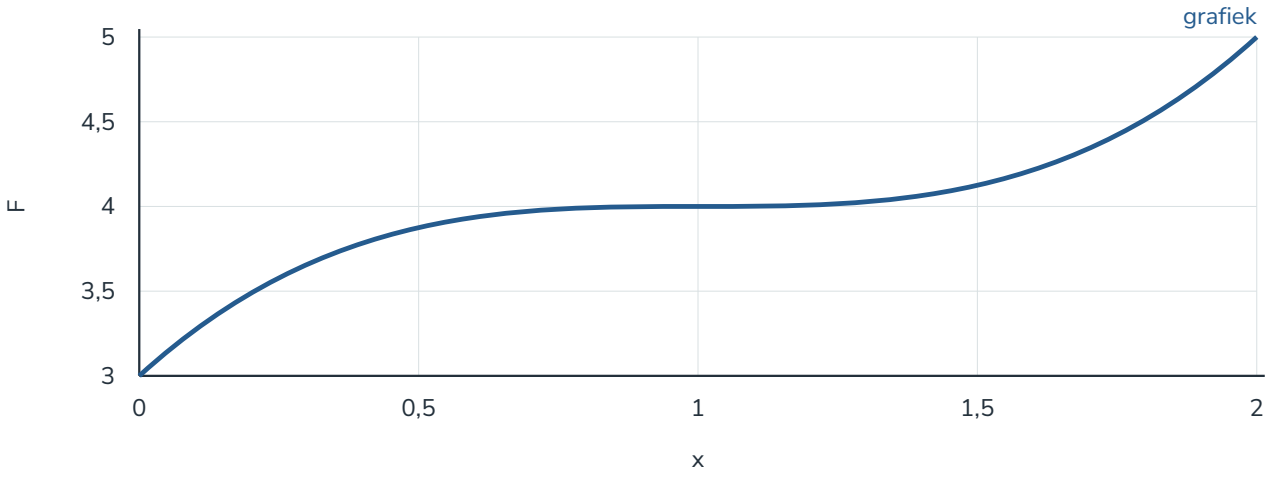


a Bepaal het lokale extremum en leg de omslag uit.

b Waarom betekent de negatieve minimumwaarde niet dat de afwijking overal afneemt?

7 Een horizontale raaklijn beoordelen

Voor $F = (x - 1)^3 + 4$ op $0 \leq x \leq 2$ is de raaklijn bij $x = 1$ horizontaal. Noor noemt (1,4) daarom een lokaal maximum.



a Leg uit waarom dit argument niet voldoende is en beoordeel de conclusie.

b Geef de grootste en kleinste waarde op het domein.

Het hele domein vergelijken

Leerdoel

Ik kan lokale extrema onderscheiden van de grootste en kleinste waarde op een gegeven domein.

Theorie

Het hele domein vergelijken

Een lokaal maximum is hoger dan nabije waarden, maar verderop kan een nog hogere waarde liggen. Bepaal de grootste en kleinste waarde op een gesloten domein door lokale toppen en dalen én de twee randpunten te vergelijken. Noteer zowel de invoerwaarde als de uitkomst. Als het domein verandert, kunnen randwaarden en toegestane extrema veranderen. Een tabel geeft alleen de grootste en kleinste gemeten waarde. Een uitspraak over het volledige verloop vraagt een aanvullende modelafspraak of een gegeven grafiek. Zie voorbeeld 6.3B, blz. 509.

Onthoud: Neem bij een gesloten domein beide randpunten mee.

8 Alleen meetwaarden

Een thermometer levert de samengestelde tabel. Het verloop tussen de meetmomenten is onbekend.

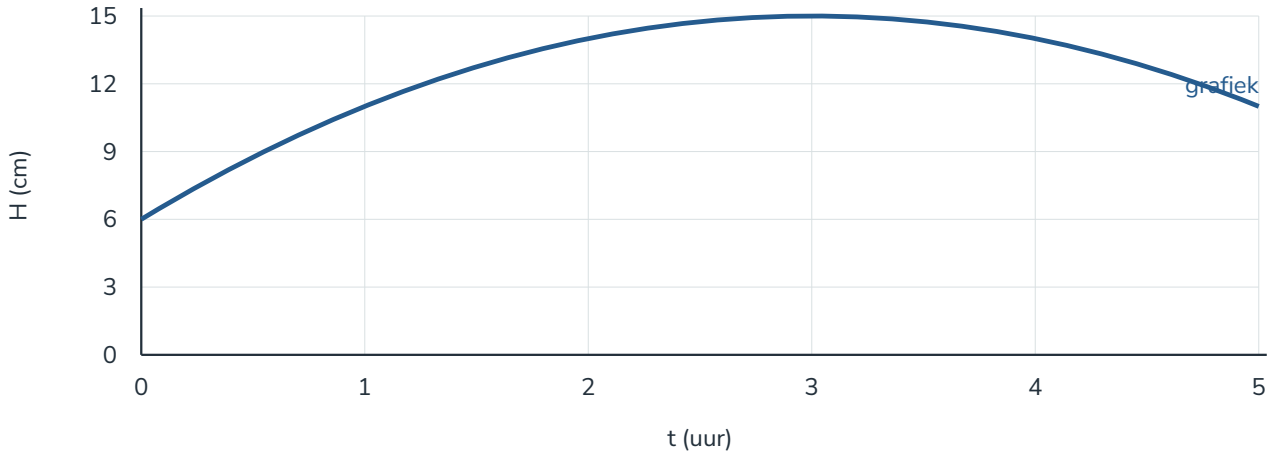
t (uur)	T (°C)
0	11
1	15
2	18
3	14
4	16

a Wat zijn de grootste en kleinste gemeten waarden?

b Bewijst de tabel een lokaal maximum bij t = 2 of dat 18 °C de hoogste temperatuur van de hele periode was?

9 Een ander domein

$H = 15 - (t - 3)^2$, met t in uren en H in cm.

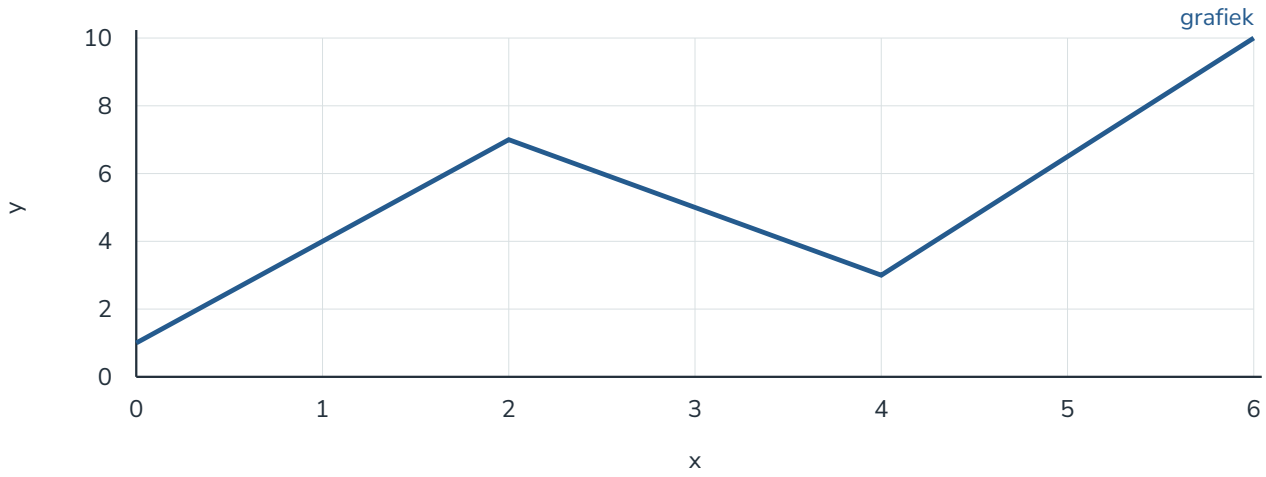


a Geef de grootste en kleinste waarde op $0 \leq t \leq 5$.

b Nu geldt alleen $4 \leq t \leq 5$. Welke extrema op dit domein blijven over?

10 Een piek en een hoge rand

Een getalmodel volgt de afgebeelde rechte lijnstukken op $0 \leq x \leq 6$.



a Geef alle lokale extrema binnen het domein.

b Bepaal de grootste en kleinste waarde op dit domein.

c Het domein wordt beperkt tot $1 \leq x \leq 5$. Bepaal opnieuw de grootste en kleinste waarde.

Het verloop in de context

Leerdoel

Ik kan het verloop beschrijven met intervallen, omslagpunten en betekenis in de context.

Theorie

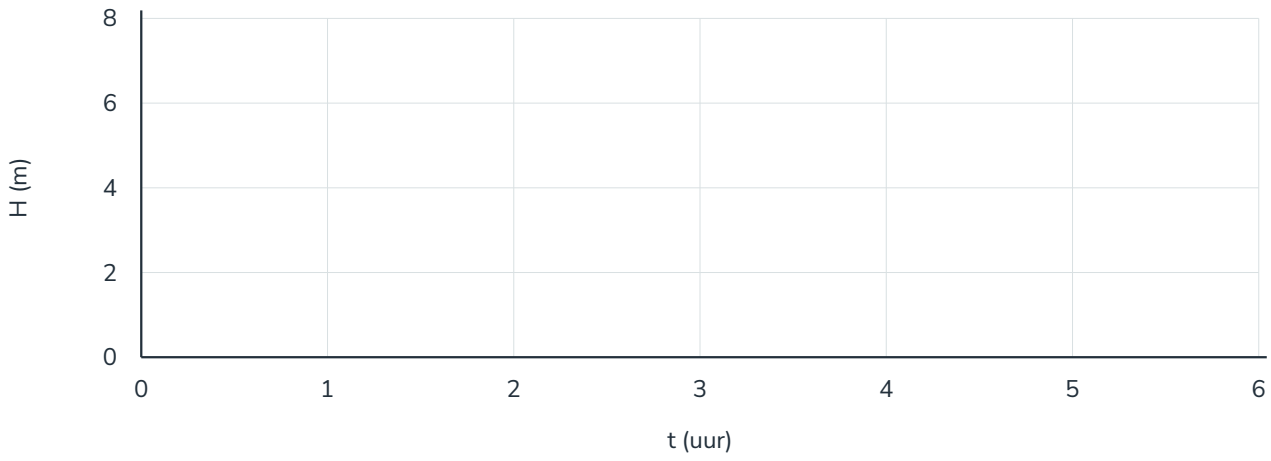
Het verloop in de context

Een goede verloopbeschrijving noemt de grootheid, de invoerintervallen en de omslagpunten met hun waarden en eenheden. Maak duidelijk waar de grafiek stijgt, daalt of constant is. Negatieve waarden geven alleen de positie ten opzichte van nul; de richting kan omhoog of omlaag zijn. Geef bij een grafisch afgelezen top of dal aan dat de waarde een schatting is. Bij een exact voorgeschreven lijnstukmodel zijn de verbindingspunten en het verloop exact bekend. Houd een schets controleerbaar met leesbare assen, schaalverdeling en labels.

Onthoud: Beschrijf niet alleen de vorm, maar ook wat die voor de grootheid betekent.

11 Een verloop zelf tekenen

Een hoogte H in meter geldt op $0 \le t \le 6$ uur: $H(0) = 3$, $H(2) = 8$, $H(4) = 1$ en $H(6) = 5$. Tussen deze punten is het verloop rechtlijnig.

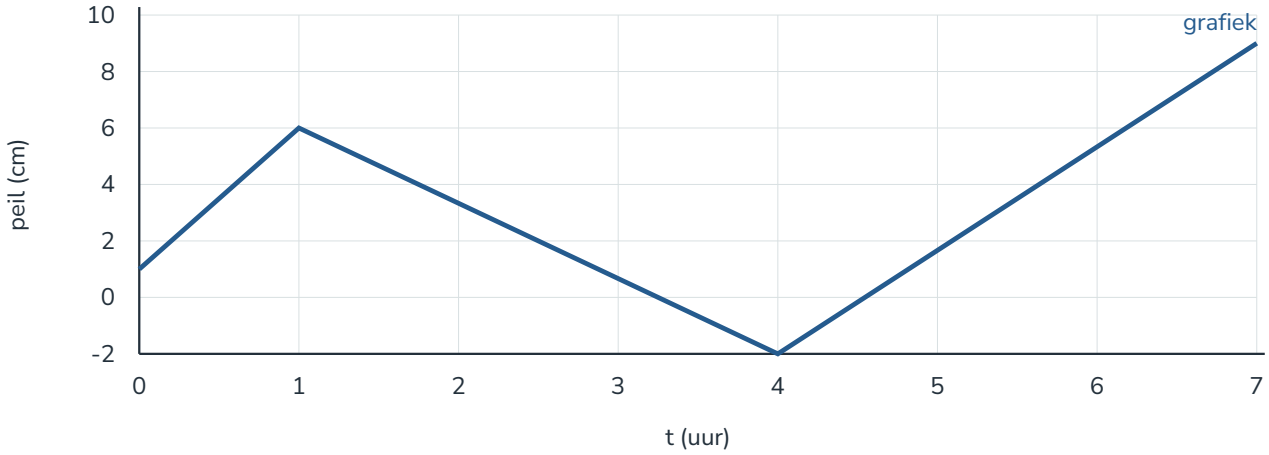


a Teken de volledige grafiek op het raster.

b Beschrijf het verloop en de lokale extrema.

12 Een dagprofiel lezen

Het waterpeil in cm wordt voor deze oefening exact door de rechte lijnstukken weergegeven, op $0 \leq t \leq 7$ uur.



a Geef alle stijgende en dalende intervallen.

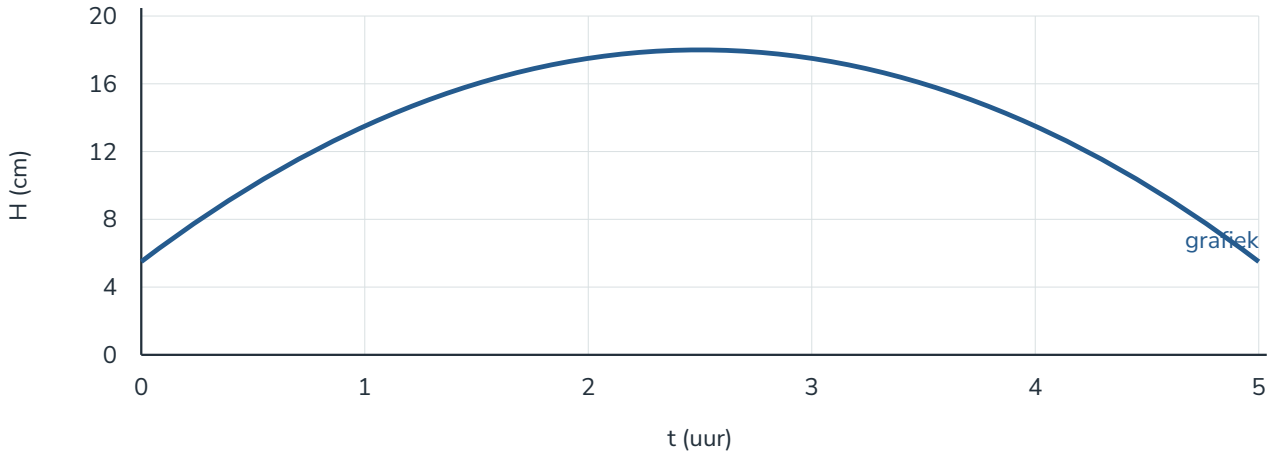
b Geef de lokale extrema binnen het domein.

c Geef het hoogste en laagste peil tijdens de hele periode.

d Beschrijf het verloop in de context.

13 Een verschoven top

$H = 18 - 2(t - 2{,}5)^2$, op $0 \leq t \leq 5$ uur. H is in cm.



a Bepaal het lokale extremum en de grootste waarde.

b Bepaal de kleinste waarde en beschrijf de intervallen van stijgen en dalen.

Herhaling

Haal de verschillende aanpakken opnieuw op. Kies zelf wat bij de vraag past.

1 Een interval en een moment

Een hoogte $H = 9 + t^2$ geldt voor $0 \le t \le 4$ minuten, met H in cm.

a Bereken de gemiddelde verandering over 0 tot 4.

b Benader de lokale verandering bij $t = 3$ met 3 tot 3,01.

c Waarom mogen deze twee uitkomsten verschillen?

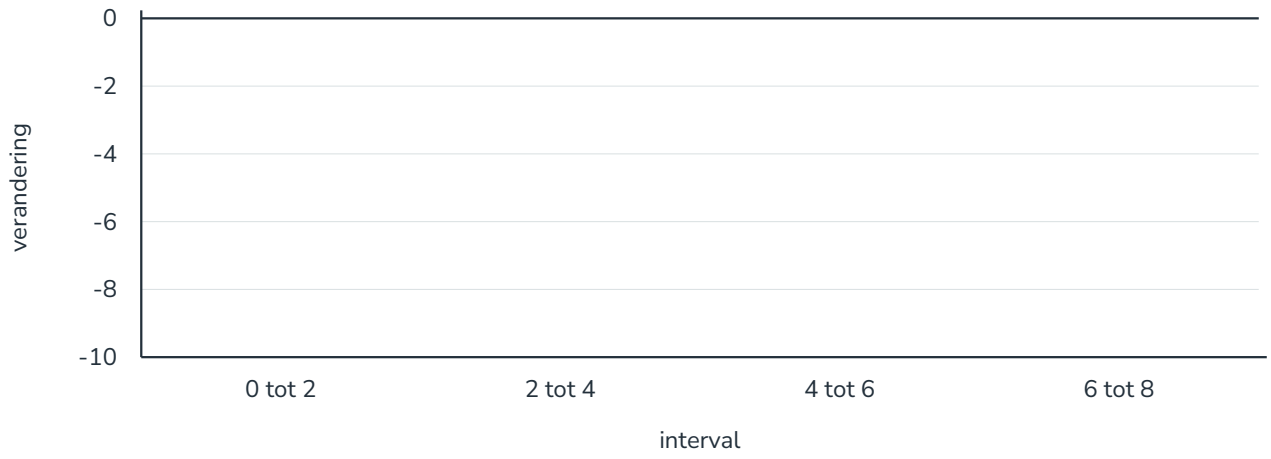
2 Verschillen reconstrueren

Een energiewaarde begint op 32 kWh. In vier intervallen van twee uur zijn de veranderingen −3, −5, −7 en −9 kWh.

a Bereken de vijf grenswaarden en beschrijf het patroon.

b Bereken de gemiddelde verandering over alle acht uur.

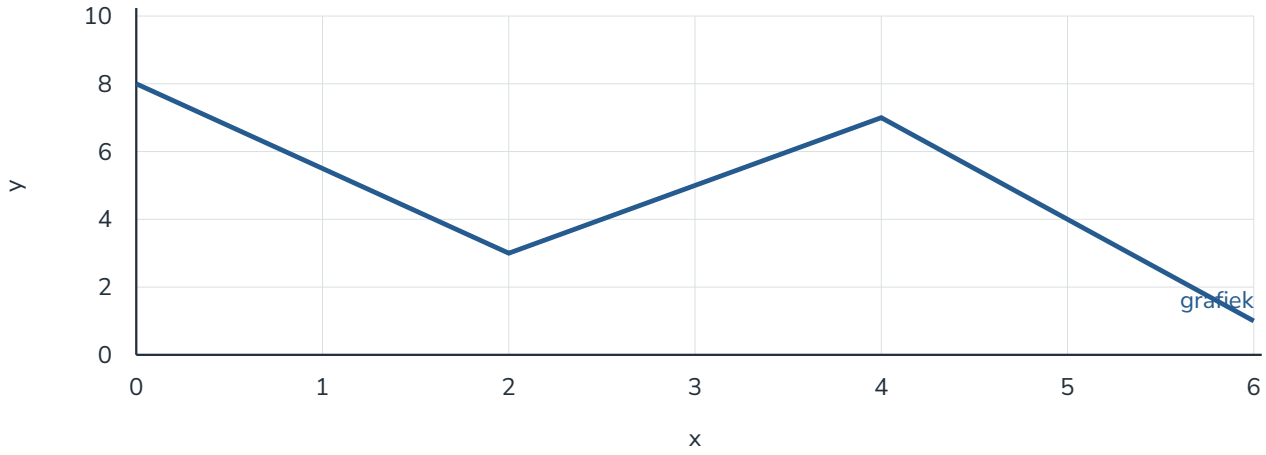
Verandering per interval



c Maak het toenamediagram met de gegeven intervallen.

3 Een rand kan het hoogst zijn

De grafiek bestaat exact uit rechte lijnstukken door (0,8), (2,3), (4,7) en (6,1).



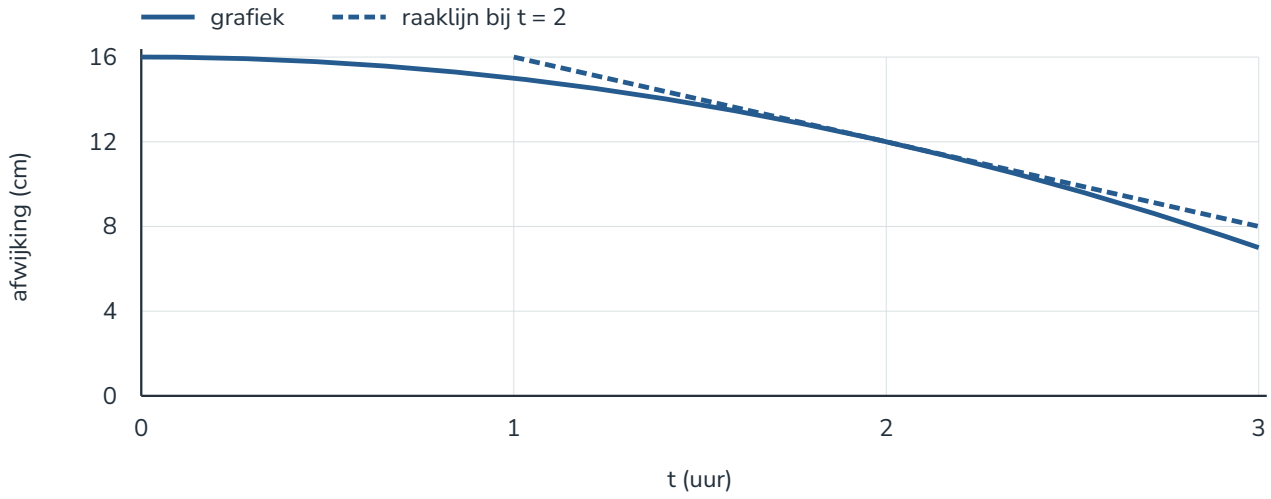
a Geef de lokale extrema binnen het domein.

b Geef de grootste en kleinste waarde op $0 \leq x \leq 6$.

c Geef de stijgende en dalende intervallen.

4 Een afwijking duiden

Een afwijking wordt door de grafiek beschreven. De gestreepte lijn is de raaklijn bij t = 2; de punten (1,16) en (3,8) liggen op deze lijn.



a Maak een hellingsdriehoek en bepaal de lokale verandering bij t = 2.

b Is de afwijking bij t = 2 positief? Neemt zij daar toe of af?

Gericht oefenen

Kies na het nakijken de opgaven die passen bij wat je nog wilt oefenen.

5 Een teken en een tijdsduur

Een hoeveelheid gaat in 2,5 uur van 8 naar −2 eenheden.

a Bereken het verschil eindwaarde min beginwaarde.

b Bereken de gemiddelde verandering, met eenheid.

c Betekent de negatieve eindwaarde dat de hoeveelheid in elk tussenmoment daalde?

6 Een hellingsdriehoek herstellen

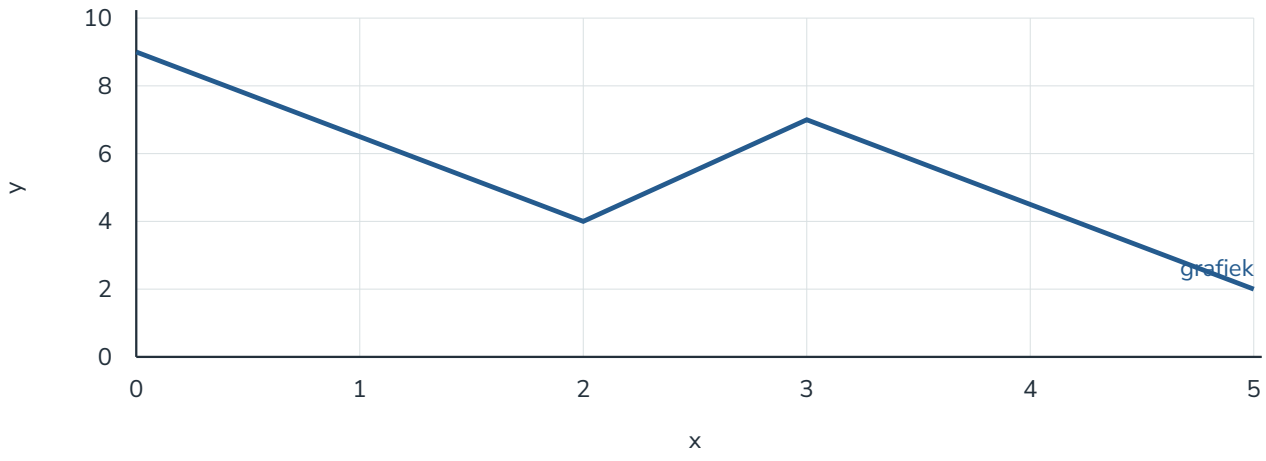
Een raaklijn door (1,14) en (5,6) hoort bij een hoogtegrafiek met tijd in minuten en hoogte in cm.

a Geef het positieve horizontale verschil en het getekende verticale verschil.

b Bereken de helling en leg de betekenis uit.

7 Van lokaal naar het domein

Een verloopmodel bestaat uit rechte lijnstukken door (0,9), (2,4), (3,7) en (5,2).



a Benoem de lokale extrema binnen het domein.

b Vergelijk deze met de randpunten en bepaal de grootste en kleinste waarde.

Nieuwe controle

Maak deze vragen zelfstandig en kijk daarna je werk na.

8 Een nieuwe meting

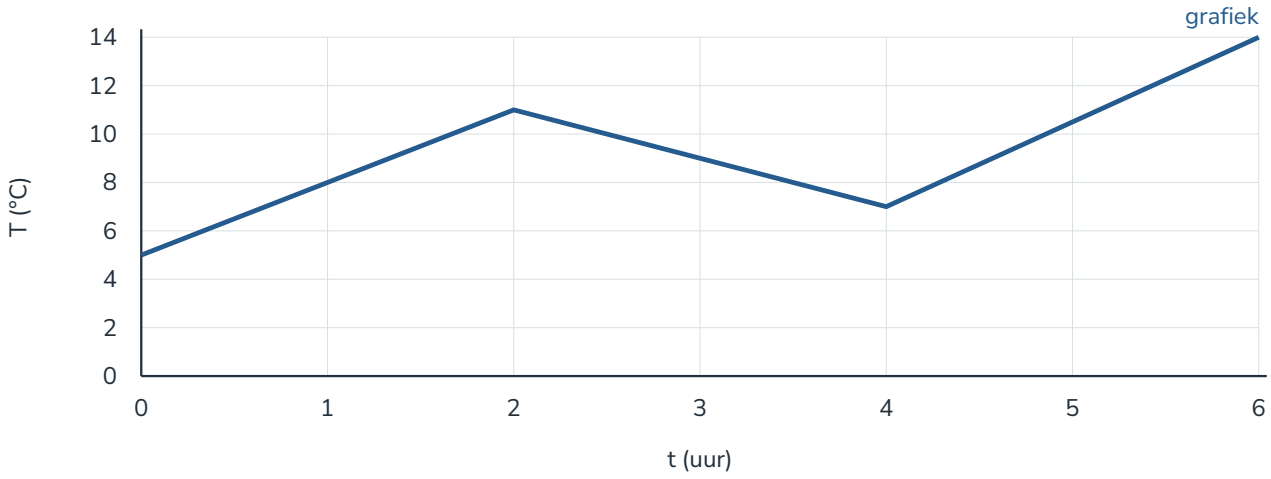
Voor $0 \le t \le 3$ uur geldt $K = 22 - 2t - t^2$, in kg.

a Bereken de gemiddelde verandering over 0 tot 3.

b Benader de lokale verandering bij $t = 2$ met 2 tot 2,01 en interpreteer.

9 Een nieuwe verloopvraag

Een temperatuurmodel wordt exact beschreven door rechte lijnstukken door (0,5), (2,11), (4,7) en (6,14); tijd in uren, temperatuur in °C.



a Geef lokale extrema en het hoogste en laagste niveau.

b Beschrijf het hele verloop.

Leerdoelenoverzicht en eindevaluatie

Beoordeel na het nakijken per leerdoel: dit lukt of dit oefen ik nog.

6.1 · Leerdoel 1: Ik kan toenemen, afnemen en constant blijven onderscheiden van positieve en negatieve waarden.

6.1 · Leerdoel 2: Ik kan een gemiddelde verandering berekenen en de juiste eenheid geven.

6.1 · Leerdoel 3: Ik kan bij gelijke intervallen een toenamediagram maken en uitleggen.

6.1 · Leerdoel 4: Ik kan toenemende en afnemende toename of afname herkennen.

6.2 · Leerdoel 1: Ik kan uitleggen waarom een kleiner interval helpt om een lokale verandering te benaderen.

6.2 · Leerdoel 2: Ik kan een lokale verandering schatten met een raaklijn en hellingsdriehoek.

6.2 · Leerdoel 3: Ik kan een lokale verandering benaderen met een tabel of formule en interval en eenheid vermelden.

6.2 · Leerdoel 4: Ik kan een lokale verandering in de context uitleggen en onderscheiden van de waarde en een gemiddelde.

6.3 · Leerdoel 1: Ik kan de intervallen aangeven waarop een grootheid stijgt of daalt.

6.3 · Leerdoel 2: Ik kan lokale maxima en minima herkennen aan een omslag tussen stijgen en dalen.

6.3 · Leerdoel 3: Ik kan lokale extrema onderscheiden van de grootste en kleinste waarde op een gegeven domein.

6.3 · Leerdoel 4: Ik kan het verloop beschrijven met intervallen, omslagpunten en betekenis in de context.

Eindevaluatie

Welke doelen lukken al zelfstandig?

Welke aanpak hielp je bij een lastige vraag?

Welke herstelopgave ga je nu maken?

Waar kun je een verandering uit dit hoofdstuk in de praktijk gebruiken?

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
Test jezelf opgave 10a–b	Waarde versus verandering; gemiddeld verschil per eenheid	Gericht oefenen opgave 5a–c	Nieuwe controle opgave 8a; 6.1 opgave 13a
Test jezelf opgave 10c–d	Toenamediagram en soort verandering	6.1 opgave 1c; 6.1 opgave 10a–b	6.1 opgave 13b; 6.1 opgave 16b
Test jezelf opgave 11a,c	Klein interval, rekenbenadering, domein en eenheid	6.2 opgave 1a–c; 6.2 opgave 3a–b; 6.2 opgave 8a–b	Nieuwe controle opgave 8b; 6.2 opgave 11a–b
Test jezelf opgave 11b,d	Raaklijnhelling en betekenis tegenover hoogte en gemiddelde	Gericht oefenen opgave 6a–b; 6.2 opgave 12a–b	6.2 opgave 7a–c; 6.2 opgave 14a–b
Test jezelf opgave 12a–d	Intervallen, lokale extrema, domeinuitersten en verloop	Gericht oefenen opgave 7a–b; 6.3 opgave 11a–b	Nieuwe controle opgave 9a–b
Test jezelf opgave 12b (verdiep de omslagcontrole)	Horizontale raaklijn is niet altijd een extremum	6.3 opgave 4a–b	6.3 opgave 7a–b

Voorbeeld 6.1A

Een gemiddelde met teken

Een vloeistofhoeveelheid is 52 liter bij t = 1 minuut en 34 liter bij t = 4 minuten.

a Bereken de gemiddelde verandering en interpreteer die.

1. Wat zoek ik?

De verandering per minuut over het interval van 1 tot 4.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik deel het inhoudsverschil door de tijdsduur, omdat een verschil in liter alleen nog geen verandering per minuut is.

3. Berekening

$\frac{34 - 52}{4 - 1} = \frac{-18}{3} = -6$.

4. Antwoord in context

De gemiddelde verandering is −6 liter per minuut: gemiddeld neemt de inhoud met 6 liter per minuut af.

5. Controle

$-6 \times 3 = -18$ liter; $52 - 18 = 34$. Dit past bij de eindwaarde.

Voorbeeld 6.1B

Een diagram en een beginwaarde

Een samengestelde oefentabel geeft een hoeveelheid in kg bij vier opeenvolgende uren.

t (uur)	massa (kg)
0	18
1	27
2	34
3	39

a Maak een toenamediagram en beschrijf het patroon.

1. Wat zoek ik?

De drie veranderingen per uur en hun patroon.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De tijdsintervallen zijn allemaal één uur. Ik trek telkens de beginwaarde van de eindwaarde af en zet het resultaat bij het hele interval.

Voorbeeld 6.1B (vervolg)

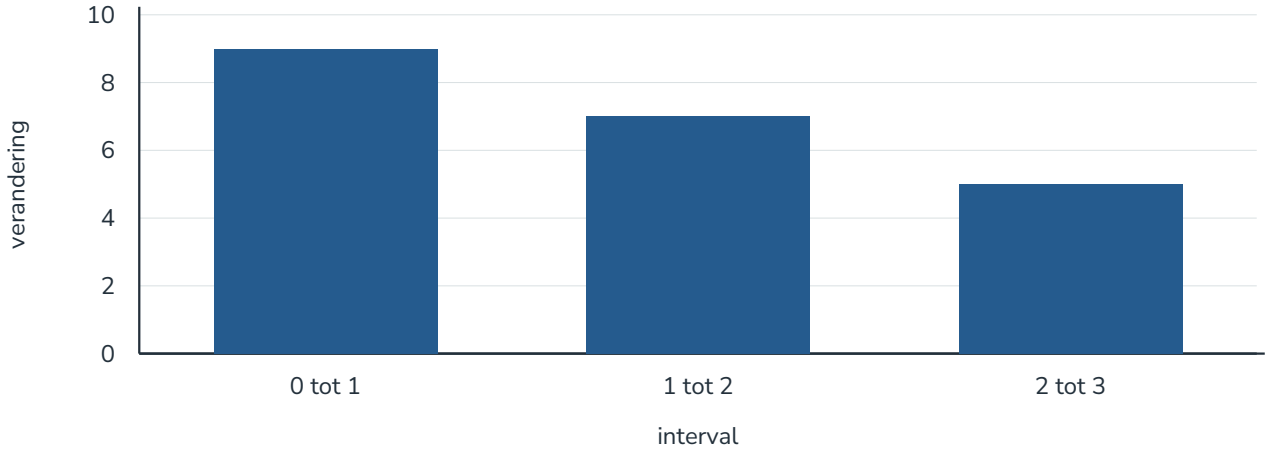
Een diagram en een beginwaarde

a Maak een toenamediagram en beschrijf het patroon.

3. Berekening

27 − 18 = 9; 34 − 27 = 7; 39 − 34 = 5.

Verandering per interval



4. Antwoord in context

De staven zijn +9, +7 en +5 kg. De hoeveelheid neemt toe, met afnemende toename.

5. Controle

18 + 9 + 7 + 5 = 39 kg, gelijk aan de laatste tabelwaarde.

Voorbeeld 6.2A

Dicht bij twee minuten

Een afstandsmodel is $S = 2 + 4t + t^2$, voor $0 \le t \le 3$ minuten, met S in meter.

a Benader de lokale verandering bij t = 2 met 2 tot 2,01.

1. Wat zoek ik?

De lokale afstandsverandering bij 2 minuten.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik bereken een gemiddelde over een klein toegestaan interval rechts van 2. Dat past bij het moment; het is nog een benadering.

3. Berekening

$S(2) = 14$; $S(2{,}01) = 14{,}0801$. $\frac{14{,}0801 - 14}{2{,}01 - 2} = 8{,}01$.

4. Antwoord in context

Op het interval [2;2,01] is de benadering 8,01 meter per minuut; lokaal ongeveer 8 meter per minuut.

5. Controle

Met [1,99;2] volgt 7,99 meter per minuut. Beide kanten ondersteunen de lokale schatting 8.

Voorbeeld 6.2B

De raaklijn gebruiken

Een hoogtegrafiek heeft bij t = 2 een raaklijn door (1,8) en (3,16). Tijd is in minuten; hoogte in cm.

a Bereken de lokale verandering met een hellingsdriehoek.

1. Wat zoek ik?

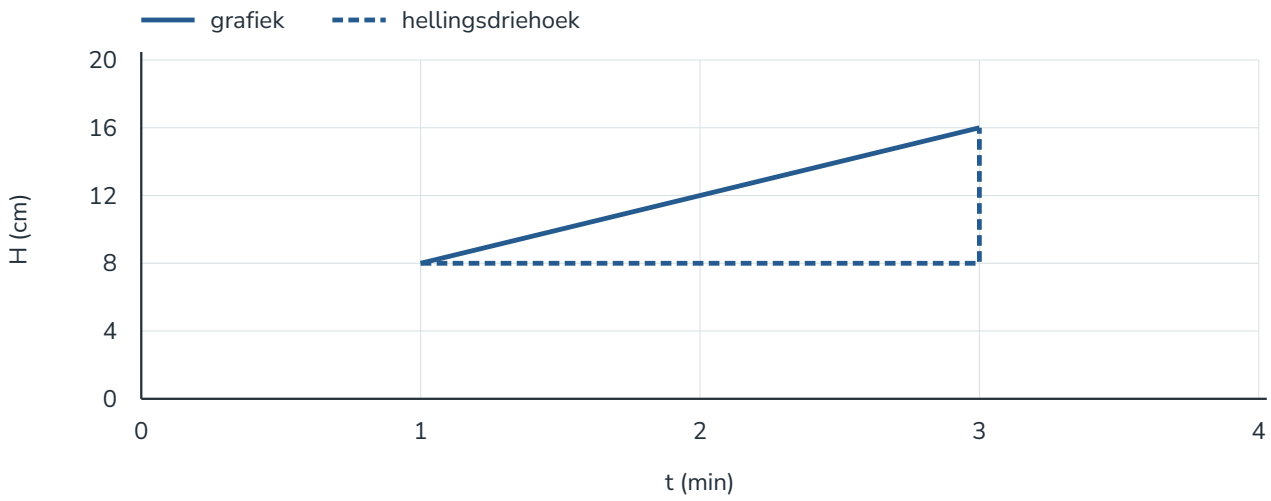
De helling van de raaklijn.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik twee punten op de raaklijn. De hellingsdriehoek geeft een positief tijdsverschil en een getekend hoogteverschil.

3. Berekening

Tijdsverschil 3 − 1 = 2; hoogteverschil 16 − 8 = 8. Helling = 8 ÷ 2 = 4.



4. Antwoord in context

De hoogte neemt bij t = 2 lokaal ongeveer 4 cm per minuut toe.

5. Controle

De raaklijn stijgt, dus de positieve helling klopt. Een tijdstap van 2 minuten geeft op de lijn 8 cm hoogteverschil.

Voorbeeld 6.3A

Een profiel beschrijven

Een exact lijnstukmodel gaat door (0,2), (2,8), (4,3) en (6,7). t is in uren en H in meter.

a Beschrijf het verloop en de lokale extrema.

1. Wat zoek ik?

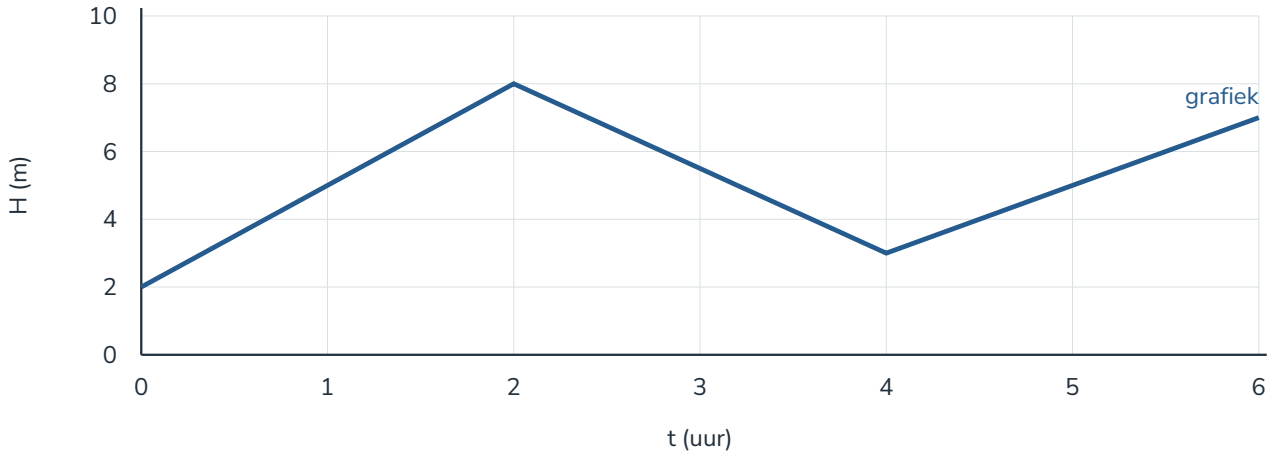
De stijgende en dalende intervallen en de omslagpunten.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik lees van links naar rechts. Een overgang van stijgen naar dalen is een lokale top; de omgekeerde overgang is een lokaal dal.

3. Berekening

Op [0;2] stijgt H, op [2;4] daalt H, op [4;6] stijgt H. De omslagpunten zijn (2,8) en (4,3).



4. Antwoord in context

De hoogte heeft een lokaal maximum van 8 m bij 2 uur en een lokaal minimum van 3 m bij 4 uur.

5. Controle

Vóór de top zijn de waarden lager; na de top dalen ze. Aan beide kanten van het dal liggen hogere waarden.

Voorbeeld 6.3B

Een hoge eindwaarde

Een exact lijnstukmodel heeft punten (0,1), (1,5), (3,2) en (5,9), op $0 \le x \le 5$.

a Bepaal de grootste en kleinste waarde en vergelijk met de lokale extrema.

1. Wat zoek ik?

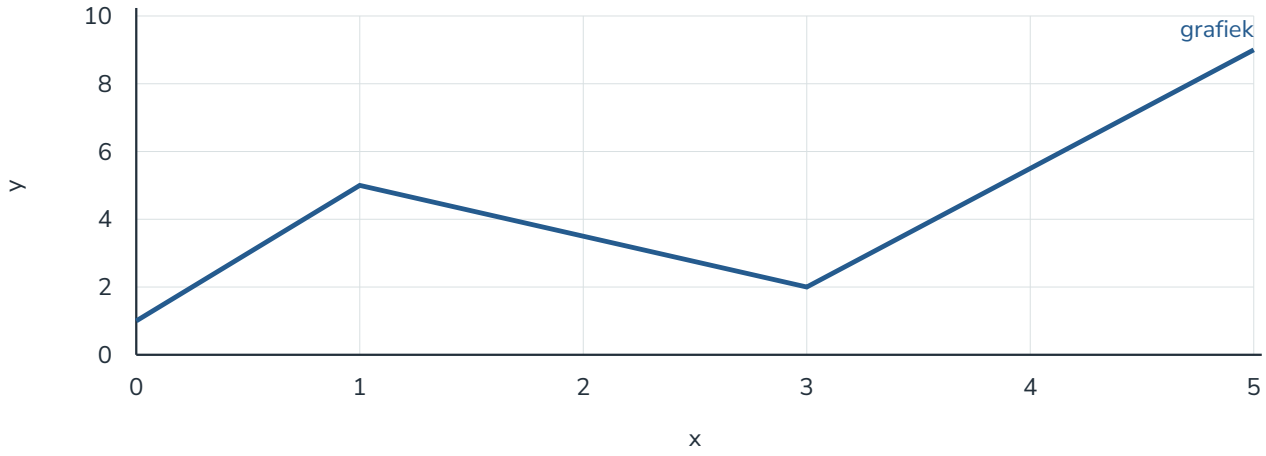
De uiterste waarden op het hele gesloten domein.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vergelijk de lokale omslagwaarden met beide randwaarden, omdat een rand hoger of lager kan liggen dan een lokale top of dal.

3. Berekening

Randwaarden 1 en 9; lokale top 5 bij $x = 1$; lokaal dal 2 bij $x = 3$.



4. Antwoord in context

Grootste waarde 9 bij $x = 5$; kleinste waarde 1 bij $x = 0$. De twee lokale extrema zijn dus niet de uiterste waarden van het hele domein.

5. Controle

Op elk gegeven rechte lijnstuk liggen de waarden tussen de waarden van zijn eindpunten; er ligt geen verborgen hogere of lagere waarde.