Uitwerkingen · Wat weet je nog?

1 Tijden samenvatten

a De som is 55; deel door 5. In de geordende rij is het derde getal de mediaan.

Antwoord Gemiddelde 11 minuten; mediaan 10 minuten.

b De som daalt naar 50, dus het gemiddelde wordt 10. De middelste waarde blijft 10.

Antwoord Het gemiddelde daalt naar 10 minuten; de mediaan blijft 10 minuten.

2 Aandelen vergelijken

a $\frac{36}{80} \times 100\% = 45\%$; $\frac{42}{120} \times 100\% = 35\%$.

Antwoord Het aandeel is in A 10 procentpunt groter, ondanks het kleinere aantal gebruikers.

3 Wie wordt onderzocht?

a De uitspraak betreft alle 6000 leden; 300 gelote leden worden benaderd.

Antwoord Populatie: alle 6000 leden. Beoogde steekproef: de 300 gelote leden. Variabele: hun oordeel over de openingstijden.

b 120 gelote leden reageren niet; hun oordeel kan systematisch verschillen.

Antwoord Non-respons kan de uiteindelijke responsgroep vertekenen.

4 Een gemiddelde vergelijken

a Beide sommen zijn 18; beide gemiddelden zijn 6. De spreidingsbreedtes zijn 4 en 8.

Antwoord Beide gemiddelden zijn 6 minuten; Q heeft meer spreiding.

5 Een deel van een geheel

a $\frac{90}{240} = \frac{3}{8} = 0{,}375$. Vermenigvuldig met 100 voor het percentage.

Antwoord $\frac{3}{8}$, 0,375 en 37,5%.

6 Een midden en twee grenzen

a Midden: $\frac{(0{,}31 + 0{,}47)}{2} = 0{,}39$. Halve breedte: 0,08. Totale breedte: 0,16.

Antwoord Midden 0,39; halve breedte 0,08; totale breedte 0,16.

6 Een midden en twee grenzen (vervolg)

b Vermenigvuldig elke proportie met 100%.

Antwoord 31% en 47%.

7 Wortels en breuken

a $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{576} = 24$.

Antwoord De uitkomsten zijn 2 en 1.

b De wortel wordt tweemaal zo groot; de teller blijft gelijk.

Antwoord De uitkomst wordt half zo groot.

8 Altijd genoeg plaatsen

a 72 is kleiner dan 72,25 en dus onvoldoende; het eerstvolgende gehele aantal is 73.

Antwoord Minstens 73 plaatsen: rond naar boven af.

Uitwerkingen

Paragraaf 7.1 · opgaven 1–16

Verdelingen beschrijven

1 Rijen vergelijken

Rij	Waarden
A	4, 7, 10, 10, 13, 16
B	8, 9, 10, 10, 11, 12
C	8, 9, 10, 10, 11, 12, 31

a Beide rijen zijn symmetrisch rond 10. A loopt van 4 tot 16; B van 8 tot 12.

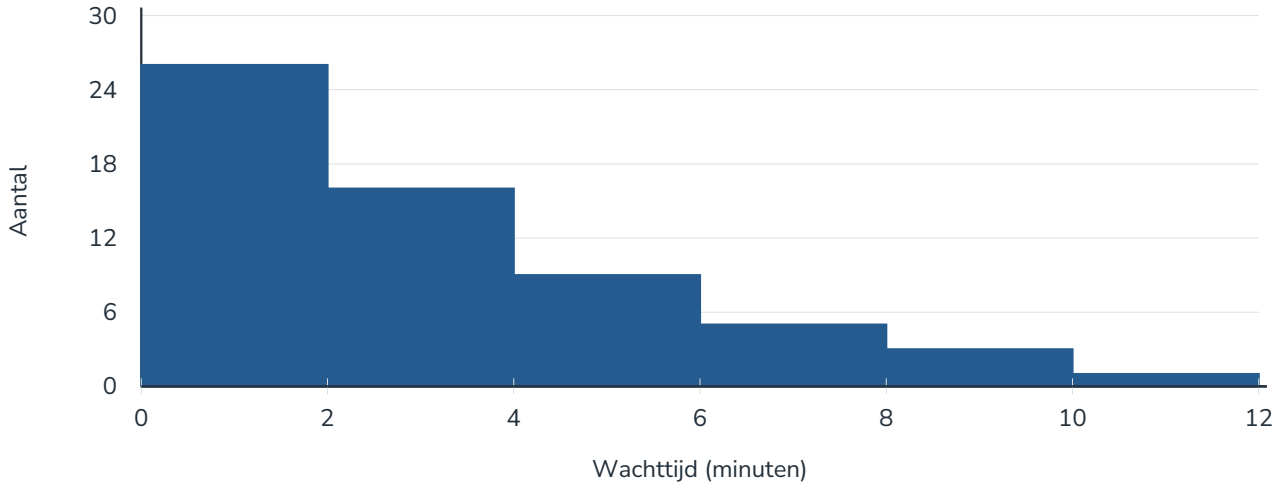
Antwoord Het centrum is gelijk; A heeft meer spreiding.

b C bevat vooral waarden 8 tot 12 en daarnaast 31. Het gemiddelde wordt door 31 omhooggetrokken.

Antwoord C heeft een lange staart naar hoge waarden en 31 is een mogelijke uitschieter.

2 De uitgiftebalie

Wachttijd bij de balie

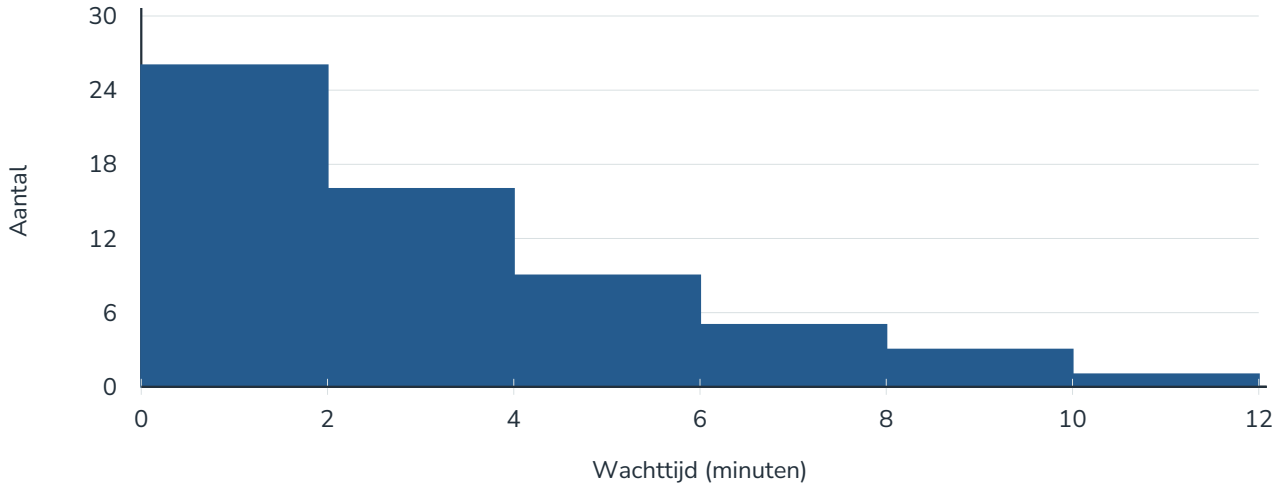


a De hoogste frequentie ligt in de eerste klasse; daarna nemen de frequenties af.

Antwoord De verdeling is scheef met een lange staart naar hoge wachttijden.

2 De uitgiftebalie (vervolg)

Wachttijd bij de balie



b De figuur is duidelijk niet symmetrisch en de top ligt aan de rand.

Antwoord Nee. Een normaal model is hier geen passende beschrijving van de individuele tijden.

3 De gemengde meting

a Elk type levert een concentratie rond zijn eigen centrum.

Antwoord Een verdeling met twee toppen, rond 20 en 40.

b Bij nauwelijks overlap liggen juist weinig metingen in de buurt van 30.

Antwoord Het gemiddelde ligt tussen de twee groepen en hoeft geen vaak voorkomende meting te zijn.

4 Twee productielijnen

Lijn	Metingen
P	18, 19, 20, 20, 20, 20, 21, 22
Q	20, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 40

a P: gemiddelde 20, mediaan 20, bereik 4. Q: som 192, gemiddelde 24, mediaan 22, bereik 20. De 40 ligt los van de waarden 20 tot 24.

Antwoord Q ligt hoger en is breder gespreid; 40 is een mogelijke uitschieter.

Ligging en spreiding

5 Instellingen van een vulmachine

a De gemiddelden zijn gelijk; 7 is groter dan 4.

Antwoord Het centrum blijft 250 gram; B is breder gespreid.

b Een vaste optelling verschuift alle waarden evenveel, zonder de onderlinge afstanden te veranderen.

Antwoord Voor C geldt $\mu = 256$ gram en $\sigma = 4$ gram.

6 Een andere eenheid

a Vermenigvuldig alle lengten en afstanden met 10.

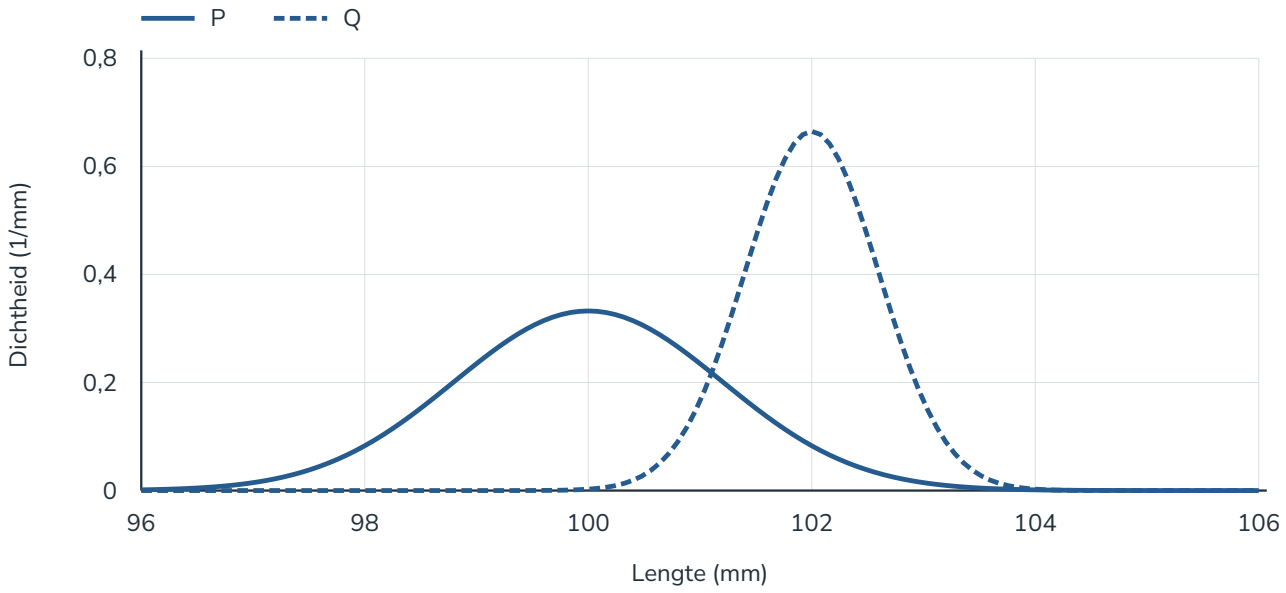
Antwoord $\mu = 82$ mm en $\sigma = 1{,}5$ mm.

b 0,15 mm is tienmaal kleiner dan 1,5 mm.

Antwoord De spreiding lijkt dan tienmaal zo klein als zij werkelijk is.

7 Nauwkeurige plaatjes

Twee normale modellen

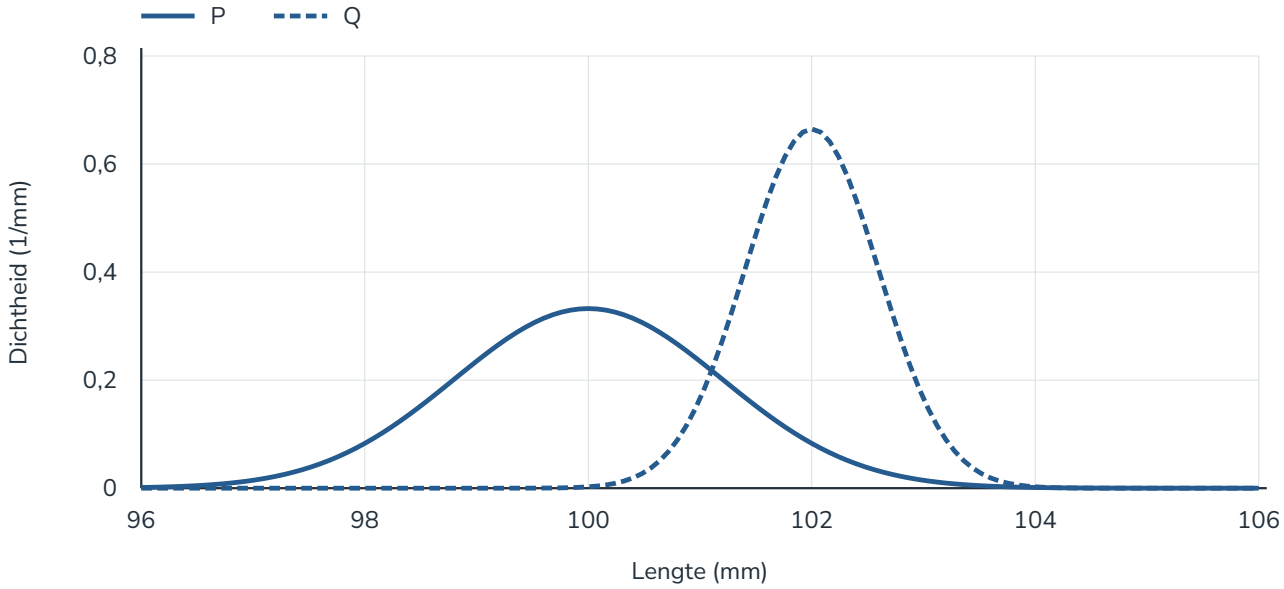


a P heeft gemiddelde 100; Q heeft de kleinste standaardafwijking.

Antwoord P ligt gemiddeld goed; Q levert onderling gelijkmatiger maten.

7 Nauwkeurige plaatjes (vervolg)

Twee normale modellen



b Het gemiddelde wordt 100; de standaardafwijking blijft 0,6.

Antwoord Beide centra zijn dan 100 mm; het aangepaste Q-model blijft smaller dan P.

De normale vuistregels

8 Een interval invullen

a $50 - 4 = 46$; $50 + 4 = 54$.

Antwoord Ongeveer 68% ligt tussen 46 en 54 minuten.

b $50 - 2 \times 4 = 42$; $50 + 2 \times 4 = 58$.

Antwoord Ongeveer 95% ligt tussen 42 en 58 minuten.

9 Controle van een partij

a Eén standaardafwijking is 5 ml; twee standaardafwijkingen zijn 10 ml.

Antwoord Ongeveer 68%: 355 tot 365 ml. Ongeveer 95%: 350 tot 370 ml.

b Buiten ligt ongeveer 5%; $0{,}05 \times 800 = 40$.

Antwoord Ongeveer 40 potjes; dit is een modelverwachting, geen vast aantal.

10 Grenzen terugvinden

a Het midden is 12,0. De halve breedte 0,6 is gelijk aan 2σ.

Antwoord $\mu = 12{,}0$ volt en $\sigma = 0{,}3$ volt.

b Neem één standaardafwijking onder en boven 12,0.

Antwoord 11,7 tot 12,3 volt.

c Drie standaardafwijkingen zijn 0,9 volt.

Antwoord Volgens het normale model ongeveer 11,1 tot 12,9 volt; enkele waarden kunnen erbuiten liggen.

11 Een te sterke belofte

a De vuistregel bij drie standaardafwijkingen luidt nagenoeg 100%, ongeveer 99,7%. Er blijven kleine staartgebieden over.

Antwoord Buiten drie standaardafwijkingen liggen zeer weinig waarden, maar het model sluit ze niet uit.

Aandelen en grenzen

12 Te laat klaar

a $33 = \mu + \sigma$. Buiten het 68%-interval ligt 32%; neem de helft.

Antwoord Ongeveer 16%.

b $36 = \mu + 2\sigma$; neem de rechterhelft van het 95%-interval.

Antwoord Ongeveer 47,5%.

13 De bovenste groep

a De bovenste 2,5% begint bij $\mu + 2\sigma$.

Antwoord Boven ongeveer 79 gram.

b 78 ligt op 1,5 standaardafwijking boven het gemiddelde. Daar hoort geen van de gegeven vuistregelgrenzen bij.

Antwoord Nee, daarvoor is aanvullende informatie of een andere berekeningswijze nodig.

14 Een garantiegrens kiezen

a De grenzen zijn μ + σ, μ + 2σ en μ + 3σ. De cumulatieve aandelen zijn circa 84%, 97,5% en 99,85%.

Antwoord Bij 47 minuten circa 84%, bij 52 circa 97,5% en bij 57 circa 99,85%.

b 52 is de kleinste grens met modelaandeel minstens 97%. Werkelijke daguitkomsten variëren.

Antwoord Kies 52 minuten. Het model geeft geen garantie voor iedere werkdag.

15 Koelen van onderdelen

a Het midden is 24; de halve breedte 6 is 2σ.

Antwoord μ = 24 minuten en σ = 3 minuten.

b Dit is het gebied tussen μ + σ en μ + 2σ: 13,5%. 0,135 × 600 = 81.

Antwoord Ongeveer 81 onderdelen.

c Bij 30 ligt de bovengrens van het middelste 95%-interval. Er ligt nog circa 2,5% boven.

Antwoord De uitspraak klopt niet: langere tijden zijn volgens het model mogelijk.

16 Een andere vraagrichting

a Deze grenzen horen bij μ − σ en μ + σ. Het midden is 32, de halve afstand is 4.

Antwoord μ = 32 mm en σ = 4 mm.

b 24 = μ − 2σ en 36 = μ + σ. Tel 47,5% en 34% op.

Antwoord Ongeveer 81,5%.

Uitwerkingen

Paragraaf 7.2 · opgaven 1–12

Toeval bij het trekken

1 Herhaald loten

a De noemer is telkens 100.

Antwoord 37%, 44%, 39%, 41% en 35%.

b Bij elke trekking worden andere personen gekozen; het aantal ja-antwoorden fluctueert door toeval.

Antwoord Door steekproefvariatie, ook bij een juiste aselecte trekking.

2 Twee avondmetingen

a $\frac{118}{200} = 59\%$; $\frac{106}{200} = 53\%$; $59 - 53 = 6$.

Antwoord Het verschil is 6 procentpunt.

b Er zijn twee steekproeven uit dezelfde populatie. Het verschil kan door toeval ontstaan; informatie over de grootte van gebruikelijke fluctuaties ontbreekt.

Antwoord Het verschil alleen bewijst geen verandering in de populatie.

3 Meer herhalingen

a De steekproefomvang blijft 80. Alleen het aantal herhalingen stijgt van 20 naar 1000.

Antwoord De afzonderlijke steekproef blijft even groot; de verdeling van mogelijke steekproefuitkomsten wordt beter zichtbaar.

b Toeval blijft bestaan bij een eindig aantal herhalingen. Bij een goed opgezet model verwacht je wel een waarde in de buurt.

Antwoord Nee. Het zal meestal dichtbij liggen, maar exact gelijk is niet gegarandeerd.

Wat stelt één punt voor?

4 Twee bestanden

a A meet per persoon; B vat steeds 100 personen samen.

Antwoord A: de tijd van één bezoeker. B: het gemiddelde van één steekproef van 100 bezoekers.

b Onderscheid het aantal herhalingen 400 van het aantal personen 100.

Antwoord B bevat 400 gemiddelden; elke waarde hoort bij 100 bezoekers.

5 Scheve tijden

a Bij grote onafhankelijke steekproeven kan de verdeling van gemiddelden ongeveer normaal worden, ook bij scheve individuele data.

Antwoord Nee. De gemiddelden kunnen een ongeveer normale verdeling vormen.

b Een uitspraak over steekproefgemiddelden is geen uitspraak over de vorm van individuele waarden.

Antwoord Nee; die twee verdelingen beschrijven verschillende grootheden.

6 Drie soorten grafieken

a Elke opgeslagen waarde is één percentage uit 250 stemmen.

Antwoord Het steekproefpercentage voorstanders; niet het antwoord van één stemmer.

b 1500 telt de runs. Per run is het percentage gebaseerd op 250 stemmen.

Antwoord De juiste steekproefomvang is 250.

c De aselecte steekproeven zijn voldoende groot en het kenmerk is niet zeldzaam.

Antwoord Een ongeveer normale verdeling van steekproefpercentages.

Grotere steekproeven

7 Simulatietabel

Omvang per run	Gemiddeld %	Middelste 95%
25	50	30% tot 70%
100	50	40% tot 60%
400	50	45% tot 55%

a De centra zijn steeds 50%. Breedten: 70 − 30 = 40; 60 − 40 = 20; 55 − 45 = 10.

Antwoord De centra blijven 50%; de breedten zijn 40, 20 en 10 procentpunt.

b 25 → 100 → 400; de breedte gaat 40 → 20 → 10.

Antwoord In deze simulatie halveert de breedte telkens.

8 Een onderzoeksbudget

n	Middelste 95%
100	40% tot 60%
400	45% tot 55%
1600	47,5% tot 52,5%

a Breedten: 20, 10 en 5 procentpunt. Kosten: € 300, € 1200 en € 4800.

Antwoord Alleen n = 400 voldoet aan breedte én budget.

b Meer simulaties veranderen het aantal deelnemers per echte steekproef niet.

Antwoord Dit voorstel verkleint de toevalsvariatie van de echte steekproef van 100 deelnemers niet.

Variatie of vertekening?

9 De avondgroep

a Leden die niet in de avond komen of nooit naar de bibliotheek gaan worden niet bereikt.

Antwoord De avondbezoekers hoeven niet representatief te zijn voor alle leden.

9 De avondgroep (vervolg)

b Loot uit het volledige ledenbestand en bied meerdere antwoordmogelijkheden. Controleer of non-respondenten systematisch afwijken.

Antwoord Trek een aselecte steekproef uit alle leden en onderzoek de non-respons.

10 Heel veel reacties

a Een groot aantal verkleint niet vanzelf verschillen tussen vrijwillige deelnemers en overige mensen. Zelfselectie blijft mogelijk.

Antwoord Veel reacties sluiten vertekening niet uit; de selectie en de respons blijven bepalend.

b Elke herhaling kan opnieuw dezelfde groepen oververtegenwoordigen.

Antwoord Dezelfde selectiemethode kan steeds dezelfde vertekening geven.

11 Het bezoekersrapport

a De samenstelling wisselt door het loten.

Antwoord Dit is toevallige steekproefvariatie.

b Eén uitkomst vat 900 bezoekers samen. Bij voldoende onafhankelijke waarnemingen is een normale benadering voor de gemiddelden aannemelijk.

Antwoord Een gemiddelde van 900 bezoekduren; de verdeling van zulke gemiddelden is doorgaans ongeveer normaal.

c De steekproefomvang per uitkomst is in de tweede reeks groter.

Antwoord De reeks met 900 bezoekers per steekproef.

d Bezoekers zonder jaarpas ontbreken bij elke trekking.

Antwoord Ook een grote steekproef uit dit bestand kan alle bezoekers onjuist vertegenwoordigen.

12 Van 200 naar 800

a Met meer deelnemers neemt de toevallige variatie meestal af. Selectieve respons kan de schatting systematisch verschuiven.

Antwoord Minder toevalsvariatie bij volledige respons, maar hier blijft kans op non-responsvertekening.

Uitwerkingen

Paragraaf 7.3 · opgaven 1–16

De juiste proportie

1 Een nieuwe ophaalplek

a n telt de 400 geldige antwoorden; $p = \frac{148}{400}$.

Antwoord n = 400 en p = 0,37.

b De 100 ontbrekende antwoorden kunnen een andere mening hebben. Ook de manier van uitnodigen moet geschikt zijn.

Antwoord Onderzoek de selectie en of de non-respons de uitkomst kan vertekenen.

2 De relevante groep

a De relevante groep telt 320 personen; $\frac{128}{320} = 0{,}40$.

Antwoord p = 0,40 met n = 320.

b Er zijn 128 + 96 = 224 abonnementhouders; $\frac{224}{800} = 0{,}28$.

Antwoord p = 0,28 met n = 800.

3 Een definitie veranderen

a Alle geldige antwoorden horen in de noemer; $\frac{270}{600} = 0{,}45$.

Antwoord p = 0,45.

b 420 = 270 + 150. De neutrale deelnemers zijn weggelaten.

Antwoord $\frac{270}{420}$ beschrijft het aandeel tevreden onder deelnemers die niet neutraal antwoordden; dat is een andere groep.

Een interval berekenen

4 Een eerste interval

a $p = \frac{160}{400} = 0{,}40$. Er zijn 160 ja-antwoorden en 240 overige antwoorden.

Antwoord $p = 0{,}40$; beide aantallen zijn ruim groter dan 10.

b $m = 2 \times \sqrt{(0{,}40 \times \frac{0{,}60}{400})} \approx 0{,}0489898$. De grenzen zijn $0{,}40 - m$ en $0{,}40 + m$.

Antwoord $m \approx 0{,}0490$; interval ongeveer [0,3510; 0,4490].

5 De reservevoorziening

a $p = \frac{275}{625} = 0{,}4400$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}4400 \times \frac{0{,}5600}{625})} \approx 0{,}0397$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,400289 en 0,479711.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,4003; 0,4797], oftewel 40,0% tot 48,0%.

b 275 hebben het kenmerk; $625 - 275 = 350$ hebben het niet.

Antwoord 275 en 350; beide zijn ruim groter dan 10.

6 Een zeldzaam probleem

a $np = 1$; $n(1 - p) = 79$. Het eerste aantal is kleiner dan 10.

Antwoord Nee. Er is te weinig informatie in de storingsgroep voor deze normale benadering.

b Een proportie kan niet negatief zijn. De benadering is hier ongeschikt; enkel een grens op nul zetten herstelt haar betrouwbaarheid niet.

Antwoord Nee. Gebruik dit interval niet als onderbouwd 95%-interval; er is een geschiktere methode of meer informatie nodig.

Proporties en percentages

7 Een interval vertalen

a $0{,}4637 \times 100 = 46{,}37$; $0{,}5763 \times 100 = 57{,}63$.

Antwoord 46,4% tot 57,6%.

b De breedte is $57{,}63 - 46{,}37 = 11{,}26$ procentpunt; deel door 2.

Antwoord 5,63 procentpunt.

8 Het ledenpanel

a $p = \frac{558}{900} = 0{,}6200$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}6200 \times \frac{0{,}3800}{900})} \approx 0{,}0324$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,587641 en 0,652359.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,5876; 0,6524], oftewel 58,8% tot 65,2%.

b $p = 0{,}62$; $m = 2 \times \sqrt{(0{,}62 \times \frac{0{,}38}{900})} \approx 0{,}03235910$. De breedte is 2m.

Antwoord Foutmarge ongeveer 3,2 procentpunt; breedte ongeveer 6,5 procentpunt.

9 Eerst afronden?

a $p = \frac{191}{360} = 0{,}5306$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}5306 \times \frac{0{,}4694}{360})} \approx 0{,}0526$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,477949 en 0,583162.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,4779; 0,5832], oftewel 47,8% tot 58,3%.

b $\frac{191}{360} \approx 0{,}53056$. Afronden op 0,5 verschuift het centrum al met ongeveer 3,06 procentpunt.

Antwoord B verschuift de schatting en daardoor de grenzen. Rond pas de einduitkomsten af.

10 Een grensgeval

a $m = 2 \times \sqrt{(0{,}56 \times \frac{0{,}44}{1000})} \approx 0{,}03139427$. Ondergrens $\approx 0{,}52860573$.

Antwoord Ondergrens ongeveer 52,8606%, afgerond 52,9%.

b 0,529 is groter dan 0,52860573 en kleiner dan de bovengrens.

Antwoord 52,9% ligt juist binnen het ongeronde interval. De afgeronde grens mag niet als exacte grens worden behandeld.

Een uitspraak beoordelen

11 Een waarde in het interval

a 0,50 ligt tussen de grenzen. Ook andere waarden in het interval passen.

Antwoord Ja, verenigbaar; nee, niet bewezen.

b Een deel van het interval ligt onder of op 0,50.

Antwoord Nee; het interval bevat ook waarden zonder meerderheid.

12 Honderd nieuwe peilingen

a De dekkingsgraad is ongeveer 0,95; $0{,}95 \times 100 = 95$.

Antwoord Ongeveer 95 intervallen; het werkelijke aantal kan afwijken.

b Het interval schat een populatieproportie, geen verzameling antwoorden van individuele personen.

Antwoord Ongeveer 95% van de herhaald berekende intervallen bevat de vaste populatieproportie.

13 De verkeerde wortel

a In de juiste formule staat n onder de wortel: $2 \times \sqrt{(0{,}60 \times \frac{0{,}40}{400})}$. Dit is ongeveer 0,0489898.

Antwoord De deler 400 moet mee onder de wortel. De foutmarge is ongeveer 4,9 procentpunt.

b Een te smal interval sluit te veel mogelijke populatiewaarden uit.

Antwoord Het onderzoek lijkt nauwkeuriger dan het is en een claim kan ten onrechte worden verworpen.

14 Een meerderheidsclaim

a $p = \frac{354}{600} = 0{,}5900$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}5900 \times \frac{0{,}4100}{600})} \approx 0{,}0402$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,549842 en 0,630158.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,5498; 0,6302], oftewel 55,0% tot 63,0%.

b De ondergrens is ongeveer 54,984%. Het hele interval ligt boven 50%.

Antwoord Ja, onder de onderzoeksvoorwaarden ondersteunt het interval een meerderheid; dit is geen absolute zekerheid.

15 Een toelichting voor lezers

a 0,61 ligt boven 0,599.

Antwoord 0,61 is niet verenigbaar met dit interval volgens deze methode.

b De populatieproportie is vast; het interval wisselt tussen steekproeven.

Antwoord Bij veel herhalingen bevat ongeveer 95% van zulke intervallen de populatieproportie.

16 Een vrijwillige enquête

a De formule meet steekproefvariatie binnen het veronderstelde model. Vrijwillige deelname kan tot een systematisch andere groep leiden.

Antwoord De selectiemethode kan vertekenen; het smalle interval corrigeert dat niet.

Uitwerkingen

Paragraaf 7.4 · opgaven 1–18

Het populatiegemiddelde schatten

1 De wachtruimte

a $\frac{6{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}65$. Vermenigvuldig met 2.

Antwoord $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0{,}65$ minuut; foutmarge 1,3 minuut.

b 18,4 − 1,3 = 17,1; 18,4 + 1,3 = 19,7.

Antwoord Het gemiddelde voor de populatie wordt geschat tussen 17,1 en 19,7 minuten.

2 Een vulsysteem

a $m = 2 \times \frac{9}{\sqrt{144}} = \frac{18}{12} = 1{,}5$.

Antwoord Het interval is 500,5 tot 503,5 gram.

b De formule gebruikt de spreiding van gemiddelden, niet de spreiding van individuele verpakkingen.

Antwoord De grenzen gaan over het onbekende populatiegemiddelde; individuele gewichten kunnen veel sterker uiteenlopen.

3 De standaardinstelling

a $m = \frac{7{,}2}{15} = 0{,}48$. De grenzen zijn 78,72 en 79,68.

Antwoord 80 mm ligt buiten het interval; de claim past niet bij dit interval volgens de gebruikte methode.

b De 225 individuele lengten bevatten de informatie over spreiding en steekproefomvang. Eén samenvatting is niet gelijk aan één oorspronkelijke onafhankelijke meting.

Antwoord Hij verwart het aantal samenvattingen met het aantal onderzochte onderdelen; de oorspronkelijke n en S moeten behouden blijven.

Foutmarge en breedte

4 Terug naar het midden

a Midden: $\frac{(7{,}8 + 9{,}0)}{2} = 8{,}4$. Breedte: 1,2. De halve breedte is 0,6.

Antwoord Midden 8,4 minuten; foutmarge 0,6 minuut; breedte 1,2 minuten.

b Nieuwe breedte 0,6, dus foutmarge 0,3.

Antwoord 8,1 tot 8,7 minuten.

5 Seconden in het verslag

a Deel door 60: $\frac{135}{60} = 2{,}25$; $\frac{6}{60} = 0{,}10$; $\frac{129}{60} = 2{,}15$; $\frac{141}{60} = 2{,}35$.

Antwoord Gemiddelde 2,25 minuten; foutmarge 0,10 minuut; grenzen 2,15 en 2,35 minuten.

b Zowel het gemiddelde als de foutmarge wordt door 60 gedeeld. Hun verhouding blijft gelijk.

Antwoord Nee; de meting en de verhouding tussen marge en gemiddelde veranderen niet.

6 Midden en spreiding terugvinden

a Het midden is 25,2; de halve breedte is 0,6.

Antwoord $\overline{X} = 25{,}2$ gram en $m = 0{,}6$ gram.

b $0{,}6 = \frac{2S}{\sqrt{400}} = \frac{2S}{20}$. Dus $S = 0{,}6 \times \frac{20}{2}$.

Antwoord $S = 6$ gram.

De omvang veranderen

7 Een plan doorrekenen

a Bij 400 is $m = \frac{24}{20} = 1{,}2$. Bij 900 is $m = \frac{24}{30} = 0{,}8$.

Antwoord 1,2 minuut en 0,8 minuut.

b De formule bevat behalve n ook S en de gekozen betrouwbaarheidsfactor.

Antwoord S en de gebruikte betrouwbaarheidsfactor blijven gelijk.

8 Verdubbelen is niet halveren

a De omvang verdubbelt, dus $m_{nieuw} = \frac{3{,}0}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12132$.

Antwoord Ongeveer 2,12 minuten.

b Halve marge vraagt viermaal de oorspronkelijke omvang: 4×80.

Antwoord $n = 320$.

9 Twee veranderingen tegelijk

a A: $\frac{16}{10} = 1{,}6$. B: $\frac{24}{20} = 1{,}2$.

Antwoord B heeft een kleinere marge: 1,2 tegenover 1,6.

b S neemt toe met factor $\frac{12}{8} = 1{,}5$, terwijl de wortel van n verdubbelt. De marge krijgt factor $\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$.

Antwoord De grotere individuele spreiding compenseert een deel van de winst door de grotere steekproef.

10 Een onderzoekskeuze

a De marge is $\frac{36}{12} = 3$ uur. Halveren vraagt $n = 576$, dus 432 extra metingen. Kosten: $432 \times 8 =$ € 3456.

Antwoord Nee, voor halvering is € 3456 extra nodig.

b Er zijn $\frac{2400}{8} = 300$ extra metingen mogelijk; totaal $n = 444$. $m = \frac{36}{\sqrt{444}} \approx 1{,}70848$.

Antwoord De verwachte marge is ongeveer 1,71 uur.

Een benodigde omvang berekenen

11 Een meetplan

a $n \geq (\frac{15}{0{,}8})^2 = 351{,}5625$.

Antwoord Minstens 352 metingen.

b Bij $n = 351$ is $m = \frac{15}{\sqrt{351}} \approx 0{,}80064 > 0{,}8$. Bij 352 is $m \approx 0{,}79950 \leq 0{,}8$.

Antwoord 351 is onvoldoende; 352 voldoet aan het plan.

12 Een onbekend aandeel

a $n \geq 4 \times 0{,}5 \times \frac{0{,}5}{0{,}025^2} = 1600$.

Antwoord Minstens 1600 geldige antwoorden.

b $\frac{1600}{0{,}80} = 2000$. Het werkelijke responsaantal kan variëren.

Antwoord Plan 2000 uitnodigingen; dat garandeert geen 1600 antwoorden of representatieve respons.

13 Een al bekende proportie

a $d = 0{,}03$. $n \geq 4 \times 0{,}30 \times \frac{0{,}70}{0{,}03^2} = 933{,}333\ldots$.

Antwoord Minstens 934 geldige antwoorden bij deze planningswaarde.

b Gebruik dan $p = 0{,}50$: $n \geq \frac{1}{0{,}03^2} = 1111{,}111\ldots$.

Antwoord Minstens 1112 antwoorden; dat zijn 178 meer.

14 Een offerte kiezen

a $n \geq (\frac{8{,}4}{0{,}5})^2 = 282{,}24$. Het minimum is 283; 280 is te weinig.

Antwoord Nee. Er zijn minstens 283 metingen nodig.

b 3 extra metingen kosten 3 × € 6 = € 18. De berekening gebruikt $S = 4{,}2$.

Antwoord Minimaal € 18 extra, mits de geschatte $S = 4{,}2$ bruikbaar blijft.

15 Verkeerd afgerond

a Het gekozen aantal moet minstens 187,06 zijn; 187 voldoet niet aan de ongelijkheid.

Antwoord Het minimum is 188. Bij benodigde capaciteit rond je naar boven af.

b De formule werkt met proporties. 4 procentpunt is 0,04.

Antwoord Gebruik $d = 0{,}04$; $d = 4$ zou een volledig verkeerde omvang geven.

16 Lampen testen

a $m = \frac{56}{14} = 4$. Grenzen: 806 en 814. Breedte: 8.

Antwoord Interval 806 tot 814 uur; foutmarge 4 uur; breedte 8 uur.

16 Lampen testen (vervolg)

b De marge halveert, dus n verviervoudigt: $4 \times 196 = 784$.

Antwoord $n = 784$.

17 Een strakkere planning

a De maximale marge is 1,5, niet 3. $n \geq (\frac{22}{1{,}5})^2 = 215{,}111\ldots$.

Antwoord Minstens 216 waarnemingen.

b Het aantal is berekend met een geschatte S en veronderstelt een geschikte onderzoeksopzet.

Antwoord Een andere werkelijke spreiding of ongeschikte steekproef kan de beoogde nauwkeurigheid aantasten.

18 De kleinste marge

a A: $\frac{10}{10} = 1$. B: $\frac{18}{20} = 0{,}9$.

Antwoord Plan B, met marge 0,9 tegenover 1.

b $n \geq (\frac{18}{0{,}8})^2 = 506{,}25$.

Antwoord Minstens 507 waarnemingen.

Uitwerkingen · Alles door elkaar

1 De verpakkingslijn

a Twee standaardafwijkingen zijn 16 gram. Boven de bovengrens ligt de helft van 5%.

Antwoord 284 tot 316 gram; daarboven ongeveer 2,5%.

b $m = \frac{16}{10} = 1{,}6$. Grenzen: $302 \pm 1{,}6$.

Antwoord 300,4 tot 303,6 gram.

c Het eerste beschrijft individuele massa's; het tweede de onzekerheid over een gemiddelde.

Antwoord Individuele massa's variëren sterker dan gemiddelden van grote steekproeven.

2 Het geluidsonderzoek

a $p = \frac{350}{625} = 0{,}5600$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}5600 \times \frac{0{,}4400}{625})} \approx 0{,}0397$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,520289 en 0,599711.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,5203; 0,5997], oftewel 52,0% tot 60,0%.

b De ondergrens is ongeveer 52,03%, dus groter dan 50%.

Antwoord Ja, onder de onderzoeksvoorwaarden.

c Een klachtenwebsite trekt mogelijk juist mensen met hinder.

Antwoord Zelfselectie kan de uitkomst vertekenen.

3 Een meetonderzoek uitbreiden

a $m = \frac{20}{10} = 2$. Grenzen: 38 en 42; breedte 4.

Antwoord [38; 42], foutmarge 2 en breedte 4.

b De maximale marge is dan 1. $n \geq (\frac{20}{1})^2 = 400$.

Antwoord Minstens 400 waarnemingen.

4 Een reeks uitkomsten

a Beide reeksen gebruiken dezelfde populatie. Grotere steekproeven middelen toevallige verschillen sterker uit.

Antwoord Het centrum blijft rond hetzelfde populatiegemiddelde; bij n = 256 is er minder steekproefvariatie.

4 Een reeks uitkomsten (vervolg)

b De vorm van individuele data verschilt van de vorm van een verdeling van gemiddelden.

Antwoord Grote geschikte steekproefgemiddelden kunnen ongeveer normaal zijn, ook bij meertoppige individuele gegevens.

Uitwerkingen · Gericht verder oefenen

1 Gebieden aan weerszijden

a Grenzen: 55 en 65. Binnen ligt 68%, dus buiten samen 32%.

Antwoord 55 en 65; ongeveer 32% erbuiten.

b Het buitengebied wordt gelijk verdeeld: 32%/2.

Antwoord Ongeveer 16%.

2 De juiste invoer

a $p = \frac{96}{240} = 0{,}4000$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}4000 \times \frac{0{,}6000}{240})} \approx 0{,}0632$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,336754 en 0,463246.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,3368; 0,4632], oftewel 33,7% tot 46,3%.

b Het interval is ongeveer 33,6754% tot 46,3246%. 50% ligt erboven.

Antwoord Ongeveer 33,7% tot 46,3%; 50% ligt buiten het interval.

3 Van breedte naar omvang

a De foutmarge is de halve breedte.

Antwoord 1 minuut.

b $n \geq (\frac{12}{1})^2 = 144$.

Antwoord Minstens 144 metingen.

c De wortel van n verdubbelt; daardoor halveert de marge.

Antwoord De marge daalt van 1 naar 0,5 minuut.

Uitwerkingen · Nieuwe controle

1 Het onthaalteam

a $p = \frac{392}{784} = 0{,}5000$. De foutmarge is $2 \times \sqrt{(0{,}5000 \times \frac{0{,}5000}{784})} \approx 0{,}0357$.

De ongeronde grenzen zijn ongeveer 0,464286 en 0,535714.

Antwoord Het interval is ongeveer [0,4643; 0,5357], oftewel 46,4% tot 53,6%.

b Het interval ligt ongeveer van 46,4% tot 53,6% en bevat 50%.

Antwoord Nee, een meerderheid wordt niet door het hele interval ondersteund.

2 Een nieuwe tijdmeting

a $m = \frac{9}{9} = 1$; de grenzen zijn 25 en 27.

Antwoord 25 tot 27 minuten; breedte 2 minuten.

b $n \geq (\frac{9}{0{,}7})^2 = 165{,}306\ldots$.

Antwoord Minstens 166 waarnemingen.

Uitwerkingen · Test jezelf

1 Het reparatiecentrum

Wachttijd (min)	Aantal
0 tot 10	32
10 tot 20	18
20 tot 30	7
30 tot 40	3

a De meeste tijden zijn laag en de frequenties nemen af naar rechts. De lange staart ligt bij de hoge tijden.

Antwoord De verdeling is duidelijk scheef met een lange staart naar hoge waarden; een normaal model past niet goed bij de individuele tijden.

b Eén waarde is het gemiddelde van 144 tijden, niet de tijd van één reparatie. De normale benadering voor deze gemiddelden is gegeven.

Antwoord Een steekproefgemiddelde van 144 reparaties; de verdeling van zulke gemiddelden kan ongeveer normaal zijn.

c $m = \frac{18}{12} = 1{,}5$; grenzen $18 \pm 1{,}5$.

Antwoord 16,5 tot 19,5 minuten.

d 0,55 ligt buiten dit interval. Bij herhaalde geschikte steekproeven verandert het interval, terwijl de populatieproportie vast blijft.

Antwoord 0,55 is niet verenigbaar met dit interval. Ongeveer 95% van de herhaald berekende intervallen bevat de populatieproportie.

2 Een voorzieningenonderzoek

a De samenstelling verschilt bij een nieuwe trekking.

Antwoord Het verschil kan ontstaan door toevallige steekproefvariatie.

b De doelgroep bestaat uit de leden in de steekproef. $n = 480$; $p = \frac{288}{480}$.

Antwoord $n = 480$ en $p = 0{,}60$.

2 Een voorzieningenonderzoek (vervolg)

c 288 leden zijn voor; 192 niet, beide groter dan 10. $m = 2 \times \sqrt{(0{,}6 \times \frac{0{,}4}{480})} \approx 0{,}04472136$.

Antwoord Ongeveer [0,5553; 0,6447]. De aantallencontrole is in orde.

d Vermenigvuldig de ongeronde grenzen en marge met 100.

Antwoord 55,5% tot 64,5%; foutmarge 4,5 procentpunt.

3 De meetopstelling

a De gemiddelden zijn gelijk; de tweede standaardafwijking is groter.

Antwoord Het centrum is gelijk; de tweede verdeling is breder.

b Neem één respectievelijk twee keer 0,2 rond 6,0.

Antwoord 5,8 tot 6,2 mm en 5,6 tot 6,4 mm.

c $6{,}4 = \mu + 2\sigma$. Boven deze grens ligt circa 2,5%; $0{,}025 \times 2000 = 50$.

Antwoord Ongeveer 50 plaatjes.

d De selectie sluit een deel van de geproduceerde plaatjes systematisch uit.

Antwoord De steekproef kan vertekend zijn voor een uitspraak over alle plaatjes.

4 Het nieuwe meetplan

a Meer waarnemingen per steekproef verminderen doorgaans de toevallige variatie van gemiddelden.

Antwoord Bij n = 400 liggen de steekproefgemiddelden dichter bij elkaar; het centrum verandert niet systematisch.

b Midden: 50. Afstand tot één grens: 1,5. Totale breedte: 3.

Antwoord 50 minuten; foutmarge 1,5 minuut; breedte 3 minuten.

c De wortel van n moet driemaal zo groot worden.

Antwoord Met factor 9.

d De maximale foutmarge is 0,7. $n \geq (\frac{14{,}4}{0{,}7})^2 \approx 423{,}18367$.

Antwoord Minstens 424 waarnemingen.