HOOFDSTUK 9

Groeimodellen

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

lineaire en exponentiële groei herkennen en berekenen;

groeifactoren en tijdseenheden met elkaar verbinden;

grafieken en modelvoorspellingen kritisch beoordelen.

Wat weet je nog?

Maak deze vragen vóór de nieuwe leerstof. Noteer je berekeningen en redeneringen. Gebruik een schrift voor je antwoorden. De onderzoeksgegevens zijn voor de oefeningen samengesteld.

1 Verschil en verhouding

Een meetreeks is 40, 50, 62,5.

a Bereken de twee opeenvolgende verschillen.

b Bereken de twee verhoudingen nieuw/oud.

2 Procenten ophalen

Een doos bevat 240 onderdelen.

a Hoeveel is 15% van 240?

b Hoeveel blijft na een afname van 15% over?

3 Een macht en een wortel

Je rekent met factoren.

a Bereken $1{,}2^3$.

b Welke positieve factor geeft na twee vermenigvuldigingen factor 1,44?

4 Het nulpunt van de tijd

t is het aantal jaren na 2024.

a Welke t hoort bij 2027 en bij 2022?

b Wat betekent een hoeveelheid bij t=0?

5 Halveren en verdubbelen

Een hoeveelheid is 72 gram.

a Bereken de hoeveelheid na drie halveringen.

b Bereken de factor van drie verdubbelingen.

6 Perioden tellen

Een modelperiode duurt 6 uur.

a Hoeveel perioden zijn 15 uur?

b Bereken $2^{2},5$.

7 Een schaal lezen

Een verticale schaal heeft onderaan 10, halverwege 20 en bovenaan 30.

a Is dit een lineaire schaal?

b Welke waarde ligt precies tussen 20 en 30 op deze schaal?

8 Een voorspelling controleren

Een model voorspelt 80 terwijl 90 is gemeten.

a Bereken de afwijking meting minus model.

b Bereken de afwijking als percentage van de modelwaarde.

9.1 Lineaire en exponentiële groei herkennen

Leerdoel

Ik kan uit een tekst, tabel of grafiek bepalen of een model lineair of exponentieel is en dit onderbouwen met verschillen of verhoudingen.

Theorie

Verschillen of verhoudingen

Bij een lineair verband is de verandering per gelijke tijdstap constant. Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per gelijke tijdstap met dezelfde positieve factor vermenigvuldigd.

Vergelijk eerst de tijdstappen. Bij ongelijke tijdsafstanden kun je de ruwe verschillen of verhoudingen niet rechtstreeks vergelijken. Zie voorbeeld 9.1A, blz. 652.

Onthoud: Een vaste factor hoort bij gelijke tijdstappen.

1 Twee patronen

Bij gelijke tijdstappen zijn de reeksen A: 30, 38, 46, 54 en B: 30, 36, 43,2, 51,84 gemeten.

a Bereken voor A de opeenvolgende verschillen en voor B de opeenvolgende verhoudingen.

b Voorspel van beide reeksen de volgende waarde en leg je keuze uit.

2 Ongelijke meetafstanden

De hoeveelheid in een reservoir is op t=0, 2 en 5 uur respectievelijk 90, 110 en 140 liter.

a Onderzoek of een lineair model past.

b Waarom zijn verschillen 20 en 30 geen argument tegen lineariteit?

3 Een model uit een tabel

Een proef levert deze tabel.

t (uur)	0	1	2	3
Hoeveelheid (mg)	400	320	256	204.8

a Kies tussen lineair en exponentieel en onderbouw je keuze met alle intervallen.

b Bereken de waarde bij t=4 en beoordeel de uitspraak: exponentieel betekent steeds sneller toenemen.

Een factor bevat de hele nieuwe hoeveelheid

Leerdoel

Ik kan een groeipercentage omzetten in een groeifactor en omgekeerd, ook bij afname.

Theorie

Een factor bevat de hele nieuwe hoeveelheid

Bij p% groei is $g=1+\frac{p}{100}$; bij p% afname is $g=1-\frac{p}{100}$. Andersom is de procentuele verandering $100(g-1)$.

Een positieve hoeveelheid kan exponentieel afnemen met $0<g<1$. Een factor 3 betekent driemaal de oude hoeveelheid, dus 200% erbij. Zie voorbeeld 9.1A, blz. 652.

Onthoud: Maak onderscheid tussen de nieuwe hoeveelheid en de verandering.

4 Van percentage naar factor

Een collectie groeit jaarlijks 7%; een andere collectie krimpt jaarlijks 12%.

a Bepaal beide factoren en leg uit welke 1 in de factor vertegenwoordigt.

b Welke veranderingen horen bij de factoren 1,025; 0,97 en 1,00?

5 Driemaal zo groot

Een digitale kaart groeit van 18 naar 54 MB.

a Bereken de groeifactor en de procentuele toename.

b Met welk percentage moet 54 MB afnemen om weer 18 MB te worden?

6 Een verkeerd minteken

Sem zegt: Bij 18% krimp is de groeifactor −0,18, dus de hoeveelheid wordt negatief.

a Verbeter de factor en verklaar de fout.

b Controleer met een beginhoeveelheid van 250.

Meer perioden achter elkaar

Leerdoel

Ik kan procentuele verandering over meerdere perioden berekenen en verklaren waarom een vaste procentuele verandering geen vaste absolute verandering geeft.

Theorie

Meer perioden achter elkaar

Na n gelijke perioden is de totale factor g^n. De totale procentuele verandering is $100(g^n-1)$. Bewaar de factor tijdens de berekening ongerond.

Bij opeenvolgende verschillende percentages vermenigvuldig je de factoren. Een procentuele stijging en even grote procentuele daling heffen elkaar niet op, omdat hun basis verschilt. Zie voorbeeld 9.1B, blz. 653.

Onthoud: Vermenigvuldig factoren; tel de percentages niet op.

7 Een sensorarchief

Iedere maand groeit een sensorarchief met 8%. De beginhoeveelheid is 500 MB; de factor per periode is 1,080.

a Bereken de hoeveelheid na 3 perioden.

b Bereken de totale procentuele verandering en vergelijk die met het percentage per periode maal het aantal perioden.

c Is dezelfde absolute verandering in iedere periode te verwachten? Leg uit.

8 Vochtverlies

Tijdens vier gelijke droogperioden verdwijnt telkens 15% van de aanwezige vloeistof. De beginhoeveelheid is 80 gram; de factor per periode is 0,850.

a Bereken de hoeveelheid na 4 perioden.

b Bereken de totale procentuele verandering en vergelijk die met het percentage per periode maal het aantal perioden.

c Is dezelfde absolute verandering in iedere periode te verwachten? Leg uit.

9 Twee prijswijzigingen

Een abonnement kost €40. Het wordt eerst 10% duurder en daarna 10% goedkoper.

a Bereken de eindprijs en het totale veranderingspercentage.

b Welk kortingspercentage zou de eerste stijging precies ongedaan maken?

10 Constante groei voorspellen

Een materiaalbank heeft 200 leden. Model L voegt ieder jaar 30 leden toe. Model E geeft jaarlijks 12% groei. Beide modellen starten nu.

a Bereken beide voorspellingen na twee jaar.

b Is de jaarlijkse absolute groei van E na twee jaar nog steeds 24 leden?

c Geef één reden waarom geen van beide modellen onbeperkt geldig hoeft te blijven.

11 Nieuwe meetreeks

Bij t=0, 1, 2 en 3 dagen zijn 625, 500, 400 en 320 eenheden geregistreerd.

a Welk van de twee groeitypen past, en waarom?

b Geef het dagelijkse veranderingspercentage en het percentage over drie dagen.

c Bereken de hoeveelheid één dag vóór t=0 volgens hetzelfde model.

d Leg met de gegeven waarden uit waarom de absolute afname niet constant is.

12 Een claim over groei

Een routeplanner meldt dat het aantal routes twee jaar achtereen met 25% is gegroeid. Het begon met 160 routes.

a Bereken het eindgetal en beoordeel de claim: in totaal 50% erbij.

b Welk vast aantal per jaar had dezelfde eindwaarde opgeleverd?

9.2 Groeiformules en tijdseenheden

Leerdoel

Ik kan een exponentiële groeiformule opstellen uit een beginwaarde en een groeifactor of twee waarnemingen.

Theorie

Een groeiformule opstellen

Een exponentiële formule heeft de vorm $N(t)=b\times g^t$. De beginwaarde b hoort bij t=0; g is de factor per eenheid van t.

Bij twee positieve waarnemingen N1 en N2 met tijdsafstand Δt geldt g=(N2/N1)^(1/Δt). Bereken daarna b door terug te rekenen naar t=0. Zie voorbeeld 9.2A, blz. 654.

Onthoud: Schrijf altijd op vanaf wanneer en in welke eenheid je tijd telt.

1 Een formule met beginwaarde

Bij het begin van een meting is 360 gram materiaal aanwezig. Per uur blijft 94% over.

a Stel een formule M(t) op met t in uren vanaf het meetbegin.

b Bereken de hoeveelheid na 6 uur.

2 Twee waarnemingen

Een archief is op dag 2 128 GB en op dag 5 250 GB. Neem exponentiële groei aan.

a Bepaal de groeifactor per dag.

b Stel een formule op met t in dagen en het oorspronkelijke dagnummer als tijdvariabele.

c Controleer beide gegeven punten.

3 Een nieuwe tijdschaal

Een proef geeft op dag 4 180 eenheden en op dag 10 320 eenheden. Een exponentieel model wordt gebruikt.

a Stel een formule op met s=0 op dag 4.

b Herschrijf met t=0 op dag 0 en bereken de beginwaarde.

Een factor omrekenen

Leerdoel

Ik kan een groeifactor en bijbehorende procentuele verandering omrekenen naar een andere tijdseenheid.

Theorie

Een factor omrekenen

Over k perioden is de factor g^k. De factor voor één k-deel van een periode is g^($\frac{1}{k}$). Dit veronderstelt een gelijkmatig exponentieel model binnen de periode.

Reken eerst de factor om en daarna pas het percentage. Geef bij maanden en weken aan welke tijdsafspraak je gebruikt. Zie voorbeeld 9.2A, blz. 654.

Onthoud: Een langere periode vraagt een macht; een kortere een wortel.

4 Van jaar naar maand

Een hoeveelheid groeit volgens het model ieder jaar met 21%. De groei is over het jaar gelijkmatig exponentieel.

a Bepaal de maandfactor.

b Waarom is $\frac{21}{12}$ geen exacte maandgroei?

5 Van weken naar dagen

Een stof heeft per week factor 0,7. Een week telt zeven dagen.

a Bereken de dagfactor en de afname per dag.

b Bereken de factor over 21 dagen zonder de dagfactor af te ronden.

6 Een uur is zestig minuten

Een meetwaarde groeit iedere 15 minuten met factor 1,06.

a Bepaal de factor per uur en de procentuele groei per uur.

b Bepaal de factor per minuut en leg uit waarom je niet door 15 deelt.

7 Twee jaarcijfers vergelijken

Model A groeit 1,5% per maand. Model B groeit 19% per jaar.

a Welk model groeit over één jaar het meest?

b Welke maandgroei zou precies overeenkomen met model B?

Het gekozen nulpunt

Leerdoel

Ik kan met een passende formule voorwaarts en terugwaarts rekenen en de betekenis van tijdstip nul uitleggen.

Theorie

Het gekozen nulpunt

Vooruitrekenen betekent vermenigvuldigen met groeifactoren; terugrekenen betekent delen. Een negatieve tijdswaarde is wiskundig mogelijk, maar alleen betekenisvol waar het model geldig is.

Begint een nieuwe teller s op het oude tijdstip k, dan is t=s+k. De factor blijft dezelfde als de tijdseenheid gelijk blijft. Zie voorbeeld 9.2B, blz. 655.

Onthoud: Een modelvoorspelling is geen gemeten gegeven.

8 Vooruit en terug

Een model voor de massa is $M(t)=75\times1{,}04^t$ gram; t=0 is het begin van maandag.

a Bereken M(5) en M(−2).

b Mag M(−2) worden opgevat als een gemeten waarde?

9 Een later startmoment

$N(t)=800\times0{,}9^t$, met t in weken. Een nieuwe teller s begint bij t=3.

a Druk t uit in s en stel N als functie van s op.

b Welke modelkenmerken veranderen en welke blijven gelijk?

10 De beginhoeveelheid ontbreekt

Na 8 dagen is bij dagelijkse afname van 6% nog 200 gram over.

a Bereken de beginhoeveelheid.

b Controleer de berekening zonder de beginwaarde tussentijds af te ronden.

11 Twee bestanden samen

Twee bestanden starten met 100 en 300 MB en groeien beide 5% per maand.

a Stel een formule op voor hun gezamenlijke omvang.

b Geldt datzelfde als het tweede bestand 2% per maand groeit? Onderzoek de eerste twee maandfactoren.

Wanneer wordt een grens bereikt?

Leerdoel

Ik kan een tijdstip waarop een gegeven grens wordt bereikt numeriek bepalen en controleren in de context.

Theorie

Wanneer wordt een grens bereikt?

Stel de modelhoeveelheid gelijk aan de grens. Bepaal de oplossing met een tabel, een grafiek of een numerieke oplosfunctie. Noteer vergelijking, gevonden tijdstip en controle.

Bij hele jaren, batches of meetmomenten bepaalt de context hoe je afrondt. Controleer altijd twee opeenvolgende gehele waarden rond de grens. Zie voorbeeld 9.2B, blz. 655.

Onthoud: Een grensvraag eindigt met een controle in de context.

12 Een grens in de tabel

Een model is $N(t)=120\times1{,}090^t$, met t in dagen en $t\geq0$.

a Bepaal wanneer N(t) voor het eerst minstens 200 is. Geef ook het eerste gehele tijdstip.

b Controleer de twee opeenvolgende gehele tijdstippen rond de grens.

13 Een opslaglimiet

Een model is $N(t)=500\times1{,}120^t$, met t in maanden en $t\geq0$.

a Bepaal wanneer N(t) voor het eerst minstens 1000 is. Geef ook het eerste gehele tijdstip.

b Controleer de twee opeenvolgende gehele tijdstippen rond de grens.

14 Te vroeg afronden

$N(t)=100\times1{,}06^t$. Een leerling vindt voor $N=150$ ongeveer $t=6{,}96$ en besluit dat op tijdstip 6 de grens is bereikt.

a Verbeter het gehele tijdstip en controleer.

b Leg uit waarom afronden naar het dichtstbijzijnde gehele getal niet de algemene regel is.

15 Nieuwe afname

Een model is $N(t)=900\times0{,}880^t$, met t in dagen en $t\geq0$.

a Bepaal wanneer $N(t)$ voor het eerst hoogstens 250 is. Geef ook het eerste gehele tijdstip.

b Controleer de twee opeenvolgende gehele tijdstippen rond de grens.

16 Een model reconstrueren

Bij $t=1$ en $t=4$ maanden zijn 96 en 165,888 eenheden gemeten. Het model is exponentieel.

a Stel een formule op en bepaal de maandgroei.

b Bepaal de weekfactor als één modelmaand uit vier weken bestaat.

c Bepaal het eerste gehele maandnummer met meer dan 300 eenheden.

d Bereken de hoeveelheid op $t=0$ en verklaar de betekenis van dit tijdstip.

9.3 Verdubbelings- en halveringstijd

Leerdoel

Ik kan een verdubbelings- of halveringstijd bepalen uit een groeifactor met een tabel, grafiek of numerieke oplossing.

Theorie

Tijd voor een vaste factor

De verdubbelingstijd is de tijd waarin de hoeveelheid met factor 2 verandert. De halveringstijd hoort bij factor 0,5. Los $g^T=2$ of $g^T=0{,}5$ numeriek op.

Deze tijd hangt bij een vast exponentieel model niet af van de beginhoeveelheid. Voor $g>1$ bestaat een positieve verdubbelingstijd; voor $0<g<1$ een positieve halveringstijd. Zie voorbeeld 9.3A, blz. 656.

Onthoud: De tijd hoort bij de factor, niet bij de beginwaarde.

1 Tijd voor een verdubbeling

$N(t)=240\times1{,}080^t$, met t in uren.

a Bepaal de verdubbelingstijd met een tabel of numerieke oplossing.

b Verandert deze tijd als de beginwaarde tweemaal zo groot wordt? Verklaar.

2 Tijd voor een halvering

$N(t)=500\times0{,}920^t$, met t in uren.

a Bepaal de halveringstijd met een tabel of numerieke oplossing.

b Verandert deze tijd als de beginwaarde tweemaal zo groot wordt? Verklaar.

3 Tijd voor een verdubbeling

$N(t)=160\times1{,}035^t$, met t in uren.

a Bepaal de verdubbelingstijd met een tabel of numerieke oplossing.

b Verandert deze tijd als de beginwaarde tweemaal zo groot wordt? Verklaar.

4 Een snelle vuistregel

Een hoeveelheid groeit met 20% per periode. Mila schat de verdubbelingstijd op $\frac{100}{20}=5$ perioden.

a Bepaal de werkelijke verdubbelingstijd en controleer Mila's uitkomst.

b Welke denkfout maakt Mila?

Een formule uit een vaste tijd

Leerdoel

Ik kan uit een verdubbelings- of halveringstijd een groeifactor en groeiformule afleiden.

Theorie

Een formule uit een vaste tijd

Bij verdubbelingstijd T is $N(t)=b\times 2^{(\frac{t}{T})}$. Bij halveringstijd T is $N(t)=b\times 0{,}5^{(\frac{t}{T})}$. t en T moeten dezelfde tijdseenheid hebben.

De factor per tijdseenheid is respectievelijk $2^{(\frac{1}{T})}$ of $0{,}5^{(\frac{1}{T})}$. Een kleinere verdubbelingstijd betekent snellere groei. Zie voorbeeld 9.3A, blz. 656.

Onthoud: De exponent $\frac{t}{T}$ telt het aantal verdubbelings- of halveringsperioden.

5 Van verdubbeling naar factor

Een hoeveelheid verdubbelt elke 9 dagen.

a Bereken de factor per dag.

b Stel een formule op als de beginhoeveelheid 45 is.

6 Een halveringstijd kiezen

Een filter halveert de concentratie in 4,5 uur. Aanvankelijk is die 160 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

a Stel een formule op met t in uren en bereken de uurfactor.

b Bereken de concentratie na 9 uur.

7 Een ontbrekende startwaarde

Een hoeveelheid heeft halveringstijd 8 dagen. Na 24 dagen is 18 gram aanwezig.

a Bereken de beginhoeveelheid en schrijf een formule.

b Controleer de beginwaarde door voorwaarts te rekenen.

8 Een strengere eis

Een stof moet in 12 uur tot hoogstens een kwart van de beginconcentratie dalen. Het model is exponentieel.

a Welke maximale halveringstijd voldoet precies aan deze eis?

b Welke voorwaarde hoort daarbij voor de factor per uur?

Ook tussen de vaste tijdstippen

Leerdoel

Ik kan een hoeveelheid berekenen na een geheel of niet-geheel aantal verdubbelings- of halveringsperioden en het resultaat interpreteren.

Theorie

Ook tussen de vaste tijdstippen

Het exponentiële model rekent ook met niet-gehele aantallen perioden. Na anderhalve halvering is de factor $0{,}5^{1}{,}5$, niet 0,25 of 0,375.

Combineer beginwaarden, factoren en grensvoorwaarden. Controleer voorspellingen met bekende verdubbelingen of halveringen en bewaak het geldigheidsgebied. Zie voorbeeld 9.3B, blz. 657.

Onthoud: Een deel van een periode vraagt een niet-gehele exponent.

9 Een deel van een periode

Een hoeveelheid van 90 eenheden verdubbelt iedere 10 uur.

a Bereken de hoeveelheid na 15 uur.

b Waarom geeft 90 plus anderhalve keer 90 niet het juiste antwoord?

10 Een kwart en een achtste

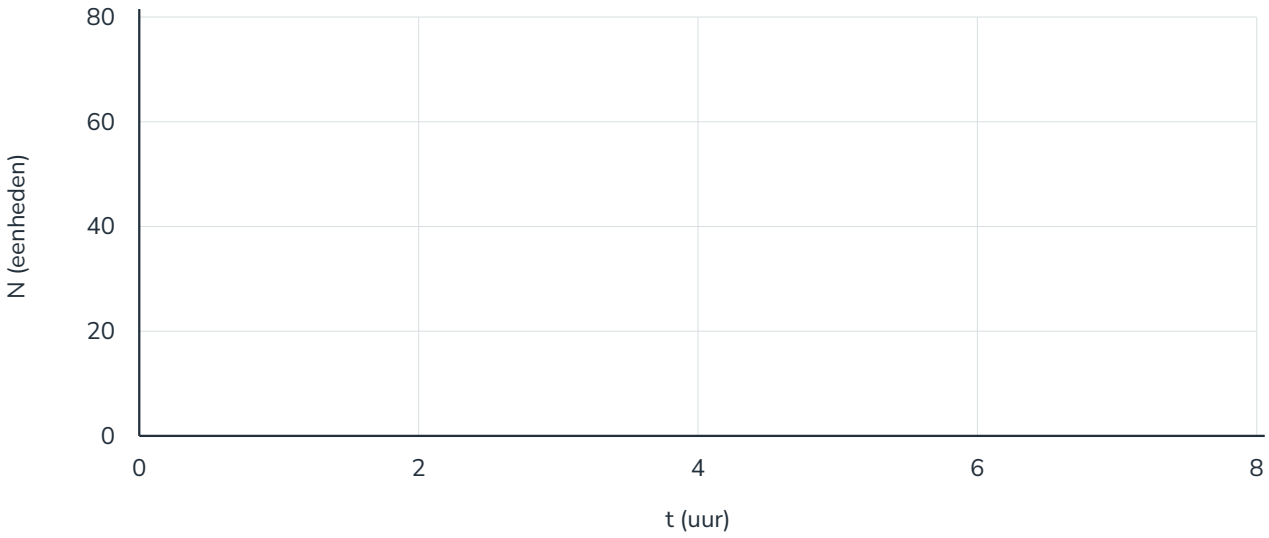
Een concentratie begint bij 64 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ en halveert iedere 3 uur.

a Wanneer zijn 16 en 8 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ bereikt?

b Bereken de concentratie na 4 uur.

11 Een grafiek met halveringen

$N(t)=80\times0{,}5^{\left(\frac{t}{4}\right)}$, met t in uren.



a Bereken waarden bij t=0, 2, 4, 6, 8 en teken de grafiek voor $0\leq t\leq 8$.

b Beschrijf waarom de grafiek steeds minder steil daalt.

12 Twee groeiprocessen

Proces A start met 50 en verdubbelt elke 6 uur. Proces B start met 120 en verdubbelt elke 12 uur.

a Bepaal welk proces na 18 uur de grootste hoeveelheid heeft.

b Bepaal wanneer de hoeveelheden gelijk zijn.

c Waarom kun je dit niet afleiden uit alleen de beginwaarden?

13 Nieuwe halvering

Een stof heeft factor 0,96 per uur en begint met 300 gram.

a Bepaal de halveringstijd.

b Hoeveel is na anderhalve halveringstijd over?

14 Een grens met verdubbelingen

Een populatie start met 75 eenheden en verdubbelt elke 5 dagen.

a Stel een groeiformule op en bepaal de factor per dag.

b Bereken wanneer 500 eenheden worden bereikt en geef het eerste gehele dagnummer met minstens 500.

9.4 Logaritmische schaal en modellen beoordelen

Leerdoel

Ik kan waarden aflezen en plaatsen op een grafiek met een logaritmische schaal en gelijke verhoudingen herkennen.

Theorie

Een logaritmische as

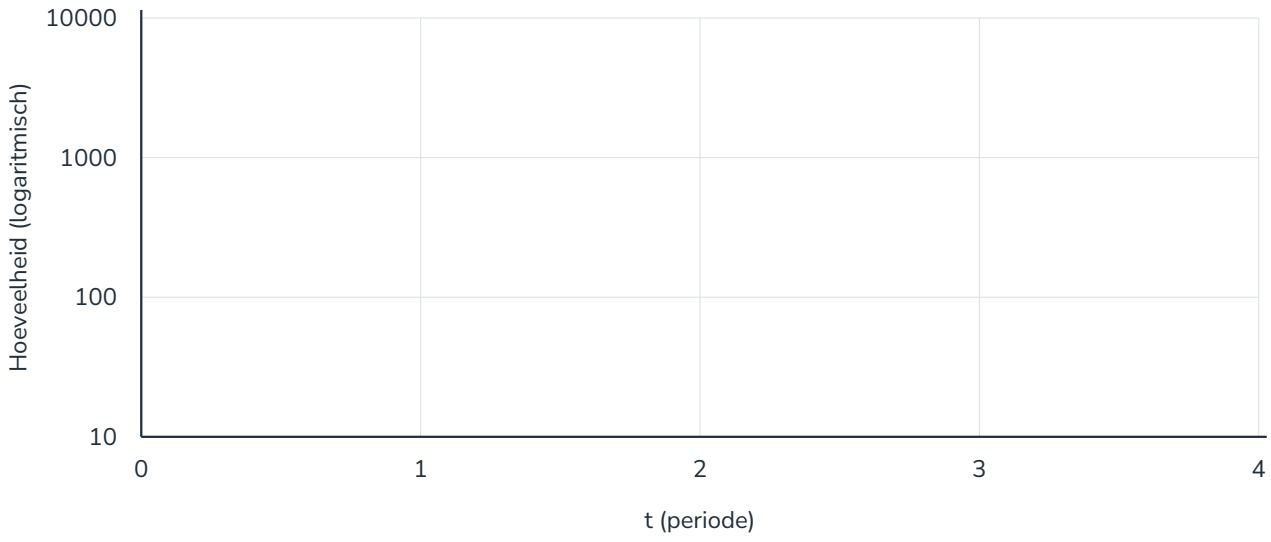
Op een logaritmische as horen bij gelijke afstanden gelijke verhoudingen. De afstand van 10 naar 100 is even groot als die van 100 naar 1000. Alleen positieve waarden hebben een positie op deze as.

Halverwege twee waarden a en b ligt daarom $\sqrt{(ab)}$. De logaritmische as kan sterk uiteenlopende hoeveelheden leesbaar in één figuur tonen. Zie voorbeeld 9.4A, blz. 658.

Onthoud: Lees de aswaarden voordat je een positie interpreteert.

1 **Gelijke afstanden, gelijke factoren**

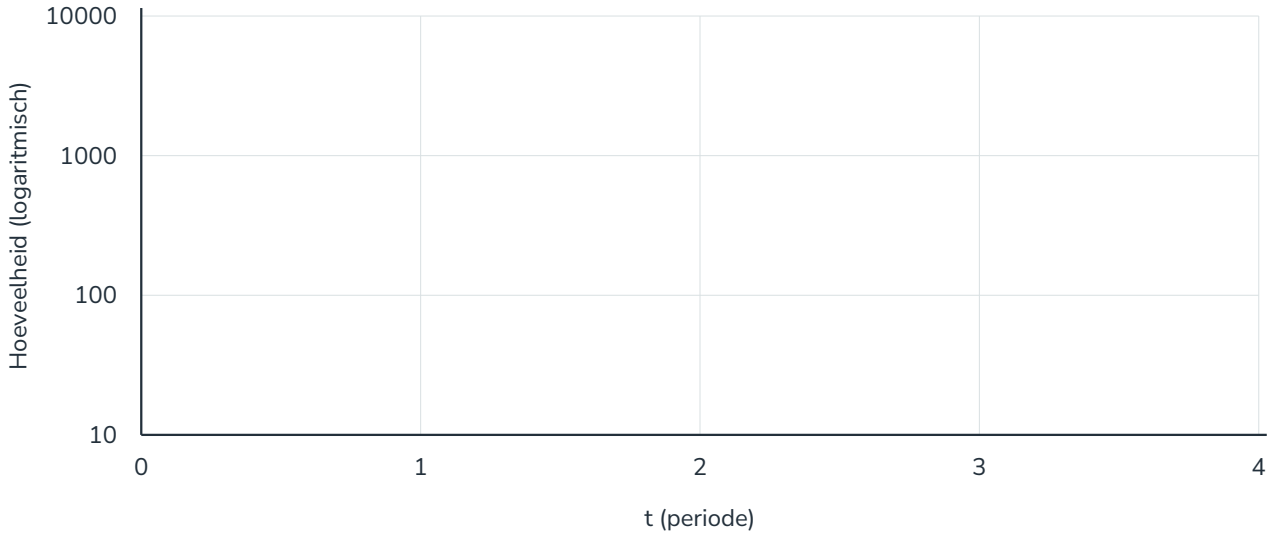
Een logaritmische as heeft op gelijke afstanden de waarden 10,100,1000 en 10000.



a Welke factor hoort bij één zo'n afstand? En bij twee afstanden?

1 Gelijke afstanden, gelijke factoren (vervolg)

Een logaritmische as heeft op gelijke afstanden de waarden 10,100,1000 en 10000.



b Welke waarde ligt halverwege 100 en 1000 op deze schaal?

c Plaats deze waarde op het rooster.

2 Een derde van een afstand

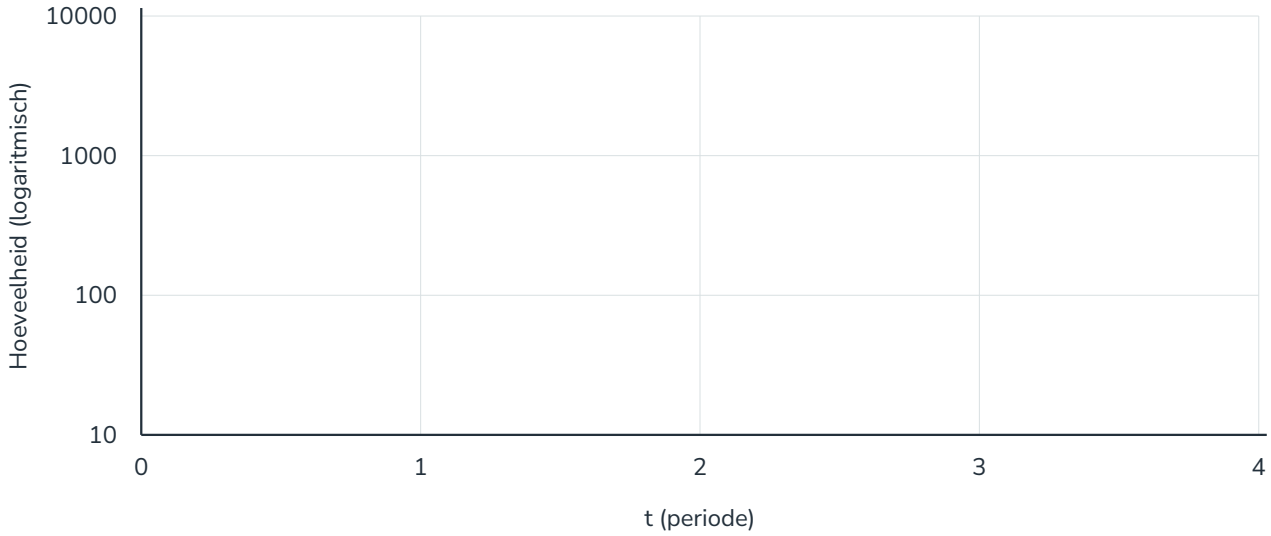
Op een logaritmische as ligt punt P op een derde van de afstand van 100 naar 1000.

a Bepaal de waarde van P.

b Waar ligt 400 tussen 100 en 1000? Geef het deel van de afstand.

3 Vier meetpunten

De meetpunten zijn (0,20),(1,60),(2,180),(3,540).



a Plaats de punten op het logaritmische rooster en beschrijf hun ligging.

b Voorspel de waarde bij t=4 en plaats het punt.

4 Een misleidende middenwaarde

Lars leest een punt halverwege 10 en 100 op een logaritmische as af als 55.

a Leg de fout uit en bereken de juiste waarde.

b Kan nul op deze gewone logaritmische as worden getekend?

De schaal verandert de vorm

Leerdoel

Ik kan gegevens op een grafiek met een lineaire en een logaritmische schaal interpreteren en het effect van de schaalkeuze uitleggen.

Theorie

De schaal verandert de vorm

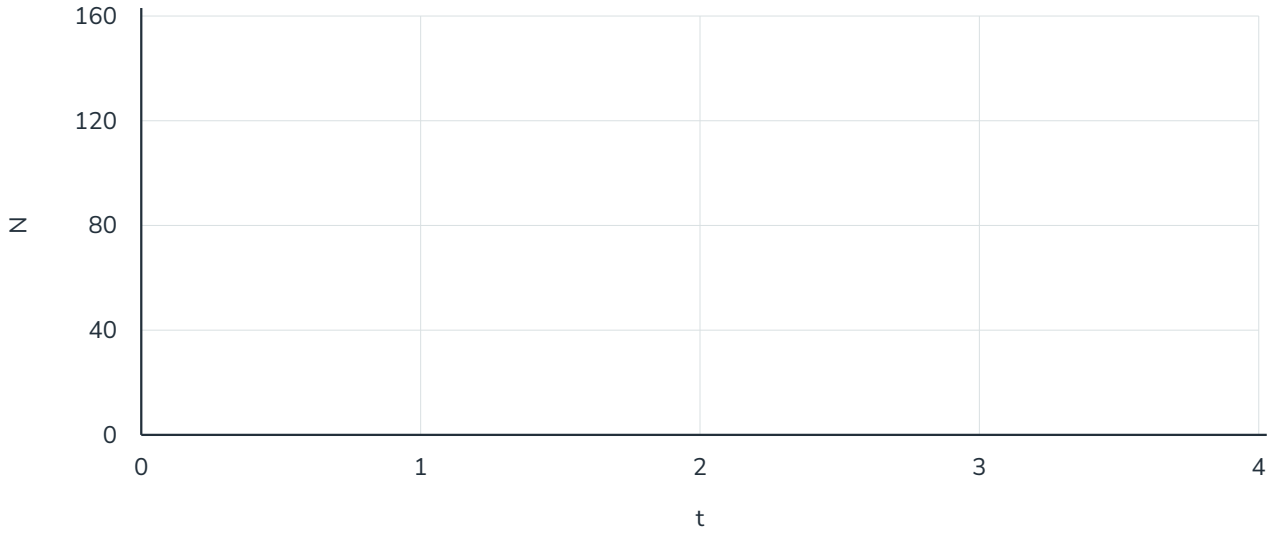
Op een grafiek met lineaire tijdas en logaritmische hoeveelheidsas vormt een exponentieel model een rechte lijn. Op twee lineaire assen is de grafiek doorgaans gekromd.

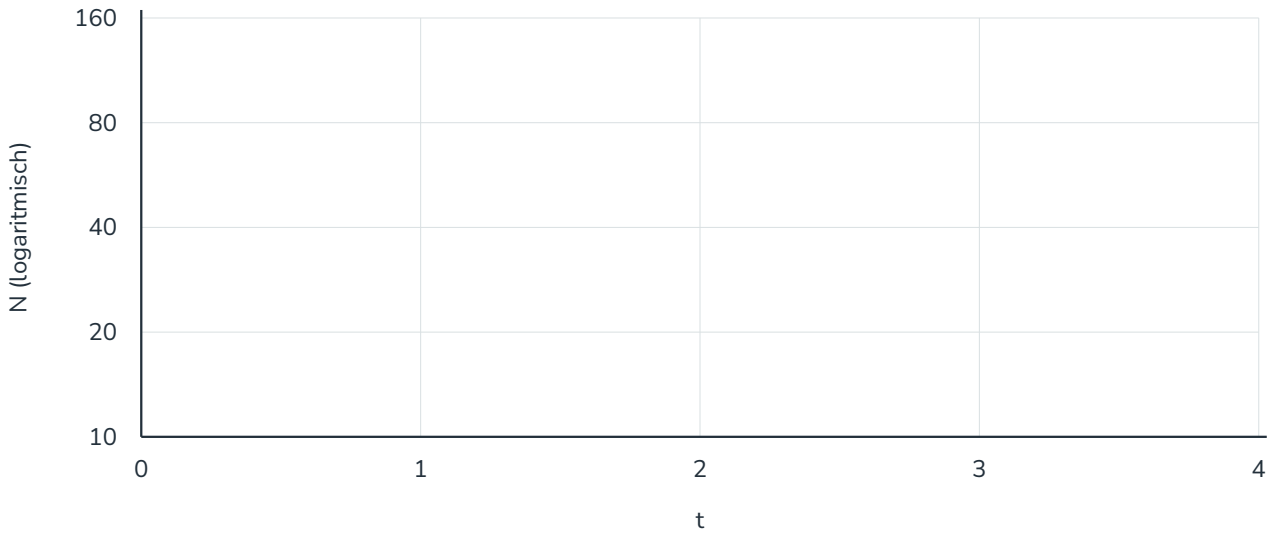
Een andere as verandert de gegevens niet. Een logaritmische as laat relatieve verschillen goed zien; een lineaire as laat absolute verschillen rechtstreeks zien. Zie voorbeeld 9.4A, blz. 658.

Onthoud: Een rechte lijn betekent alleen iets als je beide schalen kent.

5 Dezelfde gegevens anders getekend

$N(t)=10\times2^t$ voor $0\leq t\leq 4$.





a Maak een tabel en teken de punten op beide roosters.

b Is het groeimodel veranderd door de andere as?

6 Een rechte lijn interpreteren

Op een grafiek is de t-as lineair en de positieve y-as logaritmisch. Vier punten bij gelijke tijdstappen liggen op een rechte stijgende lijn.

a Welke conclusie over verhoudingen past hierbij?

b Bewijst de rechte lijn dat de toename per tijdstap hetzelfde aantal is?

7 Een ogenschijnlijk kleine groei

Een waarde groeit van 100 naar 200 en later van 1000 naar 2000.

a Vergelijk de absolute en procentuele veranderingen.

b Vergelijk beide afstanden op een logaritmische as.

Metingen met voorspellingen vergelijken

Leerdoel

Ik kan aan de hand van gegevens, grafieken en afwijkingen beoordelen of een exponentieel model bruikbaar is.

Theorie

Metingen met voorspellingen vergelijken

Bereken per meetmoment de modelwaarde en het verschil met de meting. Let op de grootte én het patroon van de afwijkingen. Kleine afrondverschillen zijn iets anders dan systematische overschatting.

Een model is een vereenvoudiging. Benoem meetonnauwkeurigheid, periode en omstandigheden waarvoor je het model gebruikt. Zie voorbeeld 9.4B, blz. 659.

Onthoud: Een bruikbaar model hoeft niet ieder afgerond meetpunt exact te raken.

8 Een model naast de metingen

$N(t)=50\times1{,}4^t$. Metingen bij $t=0,1,2,3$ zijn 50,71,98 en 139.

a Bereken de voorspellingen en afwijkingen meting minus model.

b De meetonnauwkeurigheid is±2 eenheden. Is dit voldoende reden om het model af te wijzen?

9 Een trend in de fouten

Een model voorspelt 100,120,144,172,8 en 207,36. Gemeten wordt 100,118,137,153 en 167.

a Bereken de afwijkingen en beschrijf het patroon.

b Waarom is het patroon informatiever dan alleen één klein beginverschil?

10 Afronding of andere groei?

Een tabel meldt na 0,1,2,3 jaar 100,110,121 en 133 leden; de aantallen zijn op hele leden afgerond.

a Onderzoek of factor 1,1 met de gegevens verenigbaar is.

b Waarom moet je de verhouding $\frac{133}{121}$ niet direct als een exact nieuw groeipercentage gebruiken?

11 Dezelfde beginperiode

Een model $N(t)=80\times1{,}2^t$ is bedoeld voor de eerste 4 weken. De weekmetingen zijn 80,96,115,2,138,2 en 165,9.

a Controleer de voorspelling voor week 4 en bereken het relatieve verschil.

b Iemand voorspelt hiermee het aantal na 100 weken. Welk ontbrekend argument moet worden besproken?

Verder voorspellen vraagt een aanname

Leerdoel

Ik kan lineaire en exponentiële modelvoorspellingen vergelijken en de beperkingen van extrapolatie onderbouwen.

Theorie

Verder voorspellen vraagt een aanname

Interpoleren blijft tussen de waarnemingen; extrapoleren gaat erbuiten. De onzekerheid over gelijkblijvende omstandigheden neemt dan vaak toe.

Vergelijk modellen op de beschikbare gegevens en op plausibele grenzen zoals capaciteit, voorraad en niet-negatieve hoeveelheden. Een goed passende beginperiode bewijst geen onbeperkte geldigheid. Zie voorbeeld 9.4B, blz. 659.

Onthoud: Controleer niet alleen de som, maar ook of de voorspelling mogelijk is.

12 Twee modellen uit dezelfde start

Model L: $N=100+20t$. Model E: $N=100\times1{,}2^t$.

a Bepaal voor welke twee gehele tijdstippen de beginvoorspellingen gelijk zijn.

b Vergelijk de voorspellingen na 5 perioden.

13 Een fysieke bovengrens

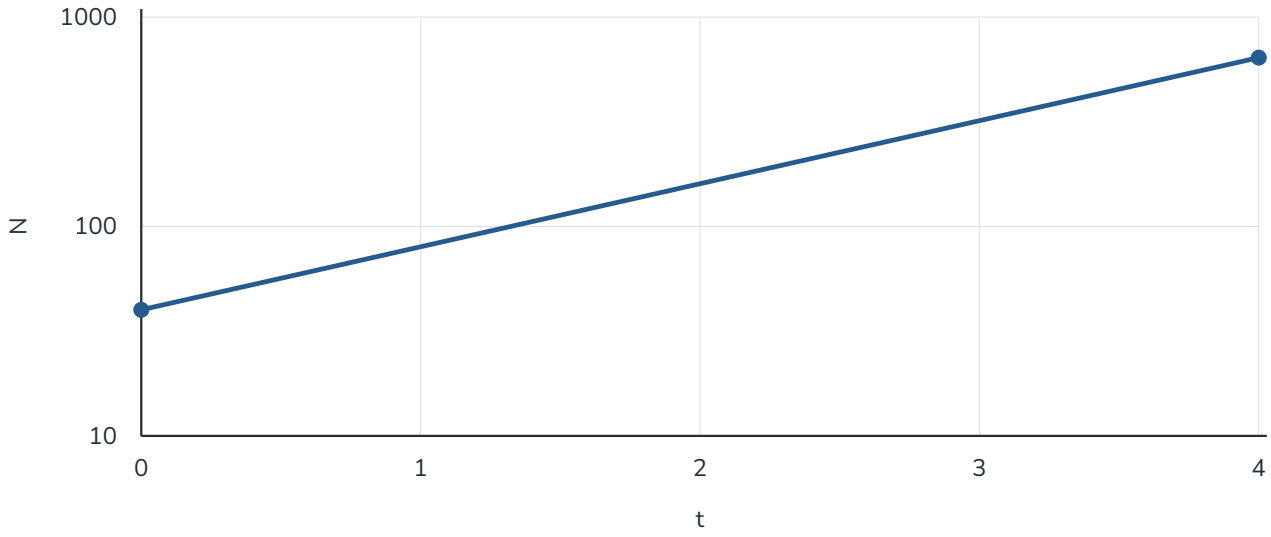
Een bassin heeft maximaal 2000 liter capaciteit. Een model voor gevuld volume is $V(t)=300\times1{,}3^t$, met t in uren.

a Bepaal wanneer het model de capaciteit bereikt.

b Waarom is het model daarna ongeschikt voor de inhoud in het bassin?

14 Een logaritmische voorspelling

Een rechte lijn op een grafiek met lineaire t-as en logaritmische y-as gaat door (0,40) en (4,640).



a Bepaal de factor per tijdseenheid en een formule.

b Welke waarde hoort bij t=2? Waarom niet 340?

15 Een grens aan het model

Een reeks heeft bij t=0, 1, 2 en 3 respectievelijk de waarden 200; 230; 264,5; 304,175. De maximale capaciteit is 500.

a Stel een model op en bepaal het eerste gehele tijdstip waarop het boven 500 voorspelt.

b Leg uit welk gebruik van het model wel verantwoord is.

c Een lineair model gebruikt alleen de eerste twee waarden. Stel dit model op en vergelijk beide voorspellingen bij t=3.

16 Welke claim past?

Bij t=0,2,4 zijn 10,40 en 160 gemeten.

a Vergelijk de voorspelling bij t=6 van het exponentiële model met een lineair model door het eerste en laatste punt.

b Welk model past ook bij het middelste punt? En garandeert dat de voorspelling?

Gemengd oefenen

1 Een meetreeks herhalen

Per periode groeit een hoeveelheid met 3%. De beginhoeveelheid is 240 eenheden; de factor per periode is 1,030.

a Bereken de hoeveelheid na 6 perioden.

b Bereken de totale procentuele verandering en vergelijk die met het percentage per periode maal het aantal perioden.

c Is dezelfde absolute verandering in iedere periode te verwachten? Leg uit.

2 Een nieuwe opslaggrens

Een model is $N(t)=90\times1{,}180^t$, met t in dagen en $t\geq0$.

a Bepaal wanneer $N(t)$ voor het eerst minstens 250 is. Geef ook het eerste gehele tijdstip.

b Controleer de twee opeenvolgende gehele tijdstippen rond de grens.

3 Twee halveringen terug

Een stof heeft halveringstijd 7 uur. Nu is 32 gram aanwezig.

a Hoeveel was 14 uur eerder aanwezig als hetzelfde model geldt?

b Hoeveel is over 10,5 uur aanwezig?

4 Procenten en de as

Een meetwaarde stijgt van 25 naar 100.

a Bereken de factor en de procentuele stijging.

b Welke waarde ligt halverwege 25 en 100 op een logaritmische as?

Gericht verder oefenen

5 Een factor herstellen

Een hoeveelheid neemt met 8% af.

a Bereken de factor en de factor over drie perioden.

b Welke fout zit in factor−0,08?

6 De tijdseenheid herstellen

Een hoeveelheid groeit per vier weken met factor 1,16.

a Bereken de weekfactor.

b Controleer door terugte rekenen.

7 Een halve periode herstellen

Een massa van 80 gram halveert elke 6 uur.

a Bereken hoeveel na 3 uur overis.

b Waarom is 60 gram geen modeluitkomst?

Nieuwe controle

8 Nieuwe controle op groei

Een model is $N(t)=320\times1{,}045^t$, met t in dagen en $t\geq0$.

a Bepaal wanneer N(t) voor het eerst minstens 500 is. Geef ook het eerste gehele tijdstip.

b Controleer de twee opeenvolgende gehele tijdstippen rond de grens.

9 Nieuwe controle op schaal

Een hoeveelheid verdubbelt in 6 dagenen start bij 40.

a Bereken de hoeveelheid na 9 dagen.

b Welke waarde ligt op een logaritmische as halverwege 40 en 160?

Leerdoelenoverzicht

9.1 · Leerdoel 1: Ik kan uit een tekst, tabel of grafiek bepalen of een model lineair of exponentieel is en dit onderbouwen met verschillen of verhoudingen.

9.1 · Leerdoel 2: Ik kan een groeipercentage omzetten in een groeifactor en omgekeerd, ook bij afname.

9.1 · Leerdoel 3: Ik kan procentuele verandering over meerdere perioden berekenen en verklaren waarom een vaste procentuele verandering geen vaste absolute verandering geeft.

9.2 · Leerdoel 1: Ik kan een exponentiële groeiformule opstellen uit een beginwaarde en een groeifactor of twee waarnemingen.

9.2 · Leerdoel 2: Ik kan een groeifactor en bijbehorende procentuele verandering omrekenen naar een andere tijdseenheid.

9.2 · Leerdoel 3: Ik kan met een passende formule voorwaarts en terugwaarts rekenen en de betekenis van tijdstip nul uitleggen.

9.2 · Leerdoel 4: Ik kan een tijdstip waarop een gegeven grens wordt bereikt numeriek bepalen en controleren in de context.

9.3 · Leerdoel 1: Ik kan een verdubbelings- of halveringstijd bepalen uit een groeifactor met een tabel, grafiek of numerieke oplossing.

9.3 · Leerdoel 2: Ik kan uit een verdubbelings- of halveringstijd een groeifactor en groeiformule afleiden.

9.3 · Leerdoel 3: Ik kan een hoeveelheid berekenen na een geheel of niet-geheel aantal verdubbelings- of halveringsperioden en het resultaat interpreteren.

9.4 · Leerdoel 1: Ik kan waarden aflezen en plaatsen op een grafiek met een logaritmische schaal en gelijke verhoudingen herkennen.

9.4 · Leerdoel 2: Ik kan gegevens op een grafiek met een lineaire en een logaritmische schaal interpreteren en het effect van de schaalkeuze uitleggen.

9.4 · Leerdoel 3: Ik kan aan de hand van gegevens, grafieken en afwijkingen beoordelen of een exponentieel model bruikbaar is.

9.4 · Leerdoel 4: Ik kan lineaire en exponentiële modelvoorspellingen vergelijken en de beperkingen van extrapolatie onderbouwen.

Eindevaluatie

Kijk je werk na met de uitwerkingen. Noteer per leerdoel een opgave die goed ging en een opgave die nog oefening vraagt.

Werk het passende onderdeel opnieuw door. Maak daarna een nieuwe controleopgave zonder je eerdere uitwerking erbij. Controleer of je aanpak nu klopt.

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
Test jezelf opgave 10a-c	Groeitype, factor en verandering over meerdere perioden	Gericht verder oefenen opgave 5; 9.1 opgave 1 en 7-8	9.1 opgave 11a-d
Test jezelf opgave 10d en 11a-c	Tijdseenheden, terugrekenen en een grens bereiken	Gericht verder oefenen opgave 6; 9.2 opgave 10 en 14	Nieuwe controle opgave 8a-b; 9.2 opgave 16b-d
Test jezelf opgave 11d en 12a-b	Vaste halverings- en verdubbelingsperioden	Gericht verder oefenen opgave 7; 9.3 opgave 1-2 en 5-6	Nieuwe controle opgave 9a; 9.3 opgave 13a-b
Test jezelf opgave 12c-d	Logaritmische schaal en grafiekvorm	9.4 opgave 4a-b en 5a-b	Nieuwe controle opgave 9b; 9.4 opgave 6a-b
Test jezelf opgave 13a-b	Modelkeuze en extrapolatie begrenzen	9.4 opgave 8a-b en 12-13	9.4 opgave 15b-c en 16a-b

Voorbeeld 9.1A

Een factor herkennen

Een watermonster bevat na 0, 1 en 2 uur 250, 225 en 202,5 mg van een stof.

a Welk model past en hoeveel procent verdwijnt per uur?

1. Wat zoek ik?

Het type verandering en het percentage.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vergelijk opeenvolgende verhoudingen bij gelijke tijdstappen.

3. Berekening

$\frac{225}{250}=0{,}9$ en $\frac{202{,}5}{225}=0{,}9$; $(0{,}9-1)\times 100=-10$.

4. Antwoord in context

Exponentiële afname met 10% per uur.

5. Controle

De verschillen zijn -25 en $-22{,}5$ en dus niet constant.

Voorbeeld 9.1B

Drie veranderingen

Een voorraad van 120 eenheden groeit drie perioden achtereen met 5%.

a Bereken de totale groei.

1. Wat zoek ik?

Het percentage over drie perioden.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De totale factor is het product van de drie periodefactoren.

3. Berekening

$1{,}05^3 = 1{,}157625; 120 \times 1{,}157625 = 138{,}915$.

4. Antwoord in context

De totale groei is 15,7625%, afgerond 15,8%.

5. Controle

Het resultaat is iets groter dan 15%, doordat latere groei over een grotere basis gaat.

Voorbeeld 9.2A

Twee jaren gegeven

Een hoeveelheid is bij t=2 gelijk aan 180 en bij t=5 gelijk aan 240.

a Stel een exponentieel model op.

1. Wat zoek ik?

De factor per jaar en de beginwaarde.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Er zitten drie jaren tussen de metingen.

3. Berekening

$g=(\frac{240}{180})^{(\frac{1}{3})}\approx 1{,}100642$; $b=\frac{180}{g^2}\approx 148{,}59$.

4. Antwoord in context

$N(t)=180\times(\frac{4}{3})^{(\frac{(t-2)}{3})}$ is een exact passende vorm.

5. Controle

Vul t=2 en t=5 in:180 en 240 volgen terug.

Voorbeeld 9.2B

Eerste heel tijdstip

$M(t)=300\times0{,}9^t$ gram, t in dagen.

a Op welke eerste hele dag is minder dan 150 gram over?

1. Wat zoek ik?

Het kleinste gehele t waarvoor de ongelijkheid geldt.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik zoek eerst het snijpunt met 150 en controleer daarna gehele dagen.

3. Berekening

$300\times0{,}9^t=150$ geeft $t\approx6{,}579$. $M(6)=159{,}4323$ en $M(7)=143{,}48907$.

4. Antwoord in context

Op dag 7 is voor het eerst minder dan 150 gram over.

5. Controle

Dag 6 voldoet nog niet en dag 7 wel.

Voorbeeld 9.3A

Een verdubbeling vinden

$N(t)=120\times1{,}15^t$ met t in weken.

a Bepaal de verdubbelingstijd.

1. Wat zoek ik?

De t waarbij de hoeveelheid 240 is.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De beginwaarde valt weg:$1{,}15^t=2$.

3. Berekening

Numeriek volgt $t\approx4{,}9595$;$120\times1{,}15^{4{,}9595}\approx240$.

4. Antwoord in context

De verdubbelingstijd is ongeveer 4,96 weken.

5. Controle

Bij week 4 is $N\approx209{,}88$ en bij week $5\approx241{,}36$; de grens ligt daartussen.

Voorbeeld 9.3B

Na zeven uur

Een concentratie van 100 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ halveert iedere 4 uur.

a Hoe hoog is de concentratie na 7 uur?

1. Wat zoek ik?

De hoeveelheid na $\frac{7}{4}$ halveringen.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik C(t)=100×0,5^($\frac{t}{4}$).

3. Berekening

C(7)=100×0,5^{1},75≈29,730.

4. Antwoord in context

Ongeveer 29,7 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

5. Controle

Na 4 uur is er 50 en na 8 uur 25 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$;29,7 past tussen die grenzen.

Voorbeeld 9.4A

Tussen honderd en duizend

Een punt ligt halverwege 100 en 1000 op een logaritmische as.

a Welke waarde hoort bij het punt?

1. Wat zoek ik?

Het getal bij een halve logaritmische afstand.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Een halve afstand betekent de wortel van de totale factor 10.

3. Berekening

$100 \times \sqrt{10} \approx 316{,}2278$.

4. Antwoord in context

Ongeveer 316,2.

5. Controle

$\frac{316{,}2}{100}$ en $\frac{1000}{316{,}2}$ zijn beide ongeveer 3,162.

Voorbeeld 9.4B

Een model toetsen

Het model $N(t)=200\times1{,}1^t$ voorspelt voor $t=3$ een hoeveelheid van 266,2 eenheden. Er zijn 270 eenheden gemeten.

a Bereken de afwijking en beoordeel die bij een meetmarge van 5 eenheden.

1. Wat zoek ik?

De afstand tussen meting en model.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik reken meting minus model en vergelijk met de toegestane meetmarge.

3. Berekening

$270-266{,}2=3{,}8;|3{,}8|<5$.

4. Antwoord in context

Deze ene meting is verenigbaar met het model binnen de gegeven marge.

5. Controle

Daarmee is de geldigheid buiten de meetperiode nog niet aangetoond.