HOOFDSTUK 11

Formules, grafieken en modelkeuze

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

formules, grafieken en contexten met elkaar verbinden;

parameters, grenswaarden en toegestane gebieden bepalen;

een passend model kiezen en de uitkomst controleren.

Wat weet je nog?

Maak deze vragen vóór de nieuwe leerstof. Noteer je berekeningen en redeneringen. Gebruik een schrift voor je antwoorden. De onderzoeksgegevens zijn voor de oefeningen samengesteld.

1 Delen en vermenigvuldigen

De paren (x, y) zijn (2,12), (3,18), (5,30).

a Bereken $\frac{y}{x}$ voor ieder paar.

b Bereken xy.

2 Een schaalfactor

Een rechthoek heeft oppervlakte 60 cm^2.

a Bereken de breedte bij een lengte van 10 cm.

b Wat gebeurt met de breedte als de lengte verdubbelt en de oppervlakte gelijk blijft?

3 Een waarde invullen

$K=6x+15$.

a Bereken K bij $x=8$.

b Los $K=75$ op.

4 Een formule omwerken

$P=ab+c$, met $a\neq0$.

a Maak b vrij.

b Controleer met $a=4$, $b=3$, $c=2$.

5 Een punt controleren

Een grenslijn is $2x+y=12$.

a Ligt (3,6) op de grenslijn?

b Voldoet (2,5) aan $2x+y\leq12$?

6 Een vergelijking en een teken

Gegeven is $3x+2=14$.

a Los de vergelijking op.

b Welke x voldoen aan $3x+2\leq 14$?

7 Controleren met een punt

Een model is $y=5x+2$. Een tabel noemt bij $x=4$ de waarde 22.

a Controleer of formule en tabel overeenkomen.

b Bewijst één passend punt dat iedere tabelwaarde bij het model past?

8 Wat is de eenheid?

Een tank wordt met 8 liter per minuut gevuld.

a Hoeveel liter komt er in 2,5 minuut bij?

b Waarom kan 20 liter per minuut niet de eenheid van deze uitkomst zijn?

11.1 Recht en omgekeerd evenredige verbanden

Leerdoel

Ik kan uit tekst, tabel, grafiek of formule bepalen of grootheden recht of omgekeerd evenredig zijn.

Theorie

Verhouding of product

Bij recht evenredige grootheden is $\frac{y}{x}$ constant en geldt $y=kx$. De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

Bij omgekeerd evenredige grootheden is xy constant en geldt $y=\frac{k}{x}$. Verdubbelen van x halveert y. Een lineair verband met een vaste beginwaarde anders dan nul is niet recht evenredig. Zie voorbeeld 11.1A, blz. 767.

Onthoud: Controleer de verhouding én de context.

1 Een vast tarief

Voor x kilogram grond betaal je $K=4{,}50x$ euro; er zijn geen vaste kosten.

a Leg uit waarom K en x recht evenredig zijn.

b Geldt dat ook bij $K=4{,}50x+8$? Verklaar.

2 Een constante hoeveelheid

De tabel geeft aantallen mensen en het bedrag per persoon voor één vaste gezamenlijke rekening.

Personen	4	6	10
Euro per persoon	60	40	24

a Onderzoek welk evenredig verband past.

b Bereken het bedrag bij 8 personen.

3 Een formule herkennen

Gegeven zijn $A=12x$, $B=\frac{12}{x}$, $C=12+x$ en $D=12x^2$ voor $x>0$.

a Welke formules zijn recht of omgekeerd evenredig met x?

b Geef voor C een tegenvoorbeeld voor recht evenredigheid.

De constante bepalen

Leerdoel

Ik kan de evenredigheidsconstante bepalen en een passende formule opstellen.

Theorie

De constante bepalen

Gebruik één betrouwbaar waardenpaar om k te bepalen: $k=\frac{y}{x}$ bij rechte evenredigheid of $k=xy$ bij omgekeerde evenredigheid.

Vermeld de grootheden en eenheden. Controleer het gegeven waardenpaar door terug te vullen in de formule. Zie voorbeeld 11.1A, blz. 767.

Onthoud: De constante krijgt betekenis door haar eenheid.

4 Een constante afleiden

Een materiaal heeft massa 21 kg bij een volume van 7 liter. Massa en volume zijn recht evenredig.

a Bepaal de constante en schrijf een formule.

b Bereken het volume bij een massa van 54 kg.

5 Een vast aantal uren

Een pomp vult een bak. Bij een debiet van 18 liter per minuut duurt dat 40 minuten. De inhoud is vast en het debiet blijft tijdens het vullen constant.

a Stel een formule voor de vultijd T bij debiet q op.

b Bereken het benodigde debiet voor een vultijd van 30 minuten.

6 Een rekening delen

Een groep betaalt samen €480. Iedereen betaalt evenveel; het aantal deelnemers n is geheel en minstens 1.

a Schrijf een formule voor het bedrag per persoon en bereken de constante.

b Minstens hoeveel deelnemers zijn nodig om per persoon hoogstens €35 te betalen?

Een schaalverandering doorrekenen

Leerdoel

Ik kan waarden, schaaleffecten en ontbrekende gegevens bij recht of omgekeerd evenredige verbanden berekenen.

Theorie

Een schaalverandering doorrekenen

Bij $y=kx$ vermenigvuldigt y met dezelfde factor als x. Bij $y=\frac{k}{x}$ verandert y met de omgekeerde factor.

Los een ontbrekende waarde op met de formule en controleer de afronding. Bij aantallen bepaalt de context of je naar boven of beneden afrondt. Zie voorbeeld 11.1B, blz. 768.

Onthoud: Een stijging van x met 25% geeft bij $\frac{k}{x}$ geen daling van y met 25%.

7 **Eén parameter verandert**

Bij $y=\frac{72}{x}$ wordt x met factor 1,5 vermenigvuldigd.

a Met welke factor verandert y?

b Welke x hoort bij $y=9$?

8 Meer product, meer materiaal

Voor 3,6 meter kabel is 0,27 kg koper nodig. De hoeveelheid koper is recht evenredig met de kabellengte.

a Bereken de koperbehoefte voor 50 meter.

b Hoeveel kabel kan maximaal met 4 kg koper worden gemaakt, op hele meters afgerond naar beneden?

9 Twee omrekeningen

Voor eenzelfde route geldt reistijd $T=\frac{180}{v}$ uur, met v inkm/uur en v>0.

a Bereken T bij 90 $\frac{\text{km}}{\text{uur}}$ en schrijf de formule met tijd in minuten.

b Met hoeveel procent daalt de tijd bij een snelheidsstijging van 25%?

De grafiek en het mogelijke domein

Leerdoel

Ik kan de grafiek, het domein en eventuele asymptoten vanuit de context interpreteren.

Theorie

De grafiek en het mogelijke domein

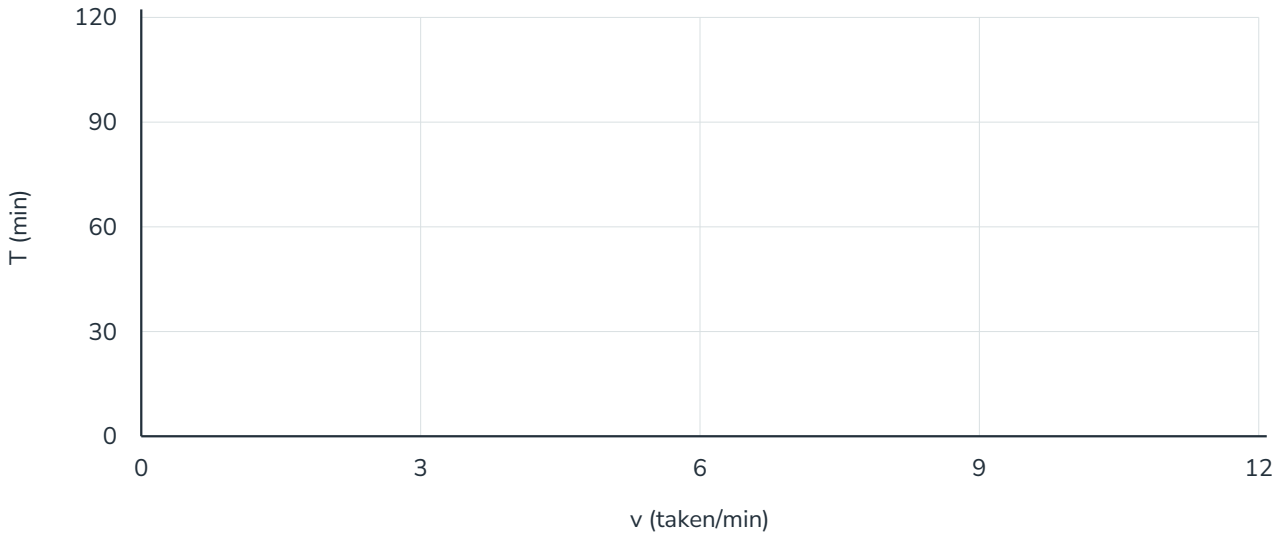
Het domein beschrijft welke x-waarden toegestaan zijn. Soms zijn alleen gehele waarden of een beperkt interval betekenisvol. Een berekening buiten dat domein is geen uitvoerbare oplossing.

Bij $\frac{k}{x}$ met positieve k zijn x=0 en y=0 asymptoten. Bij $c+\frac{k}{x}$ is y=cde horizontale asymptoot. De fysieke situatie kan al eerder een grens opleggen. Zie voorbeeld 11.1B, blz. 768.

Onthoud: Een wiskundige grens hoeft praktisch niet bereikbaar te zijn.

10 Geen oneindige snelheid

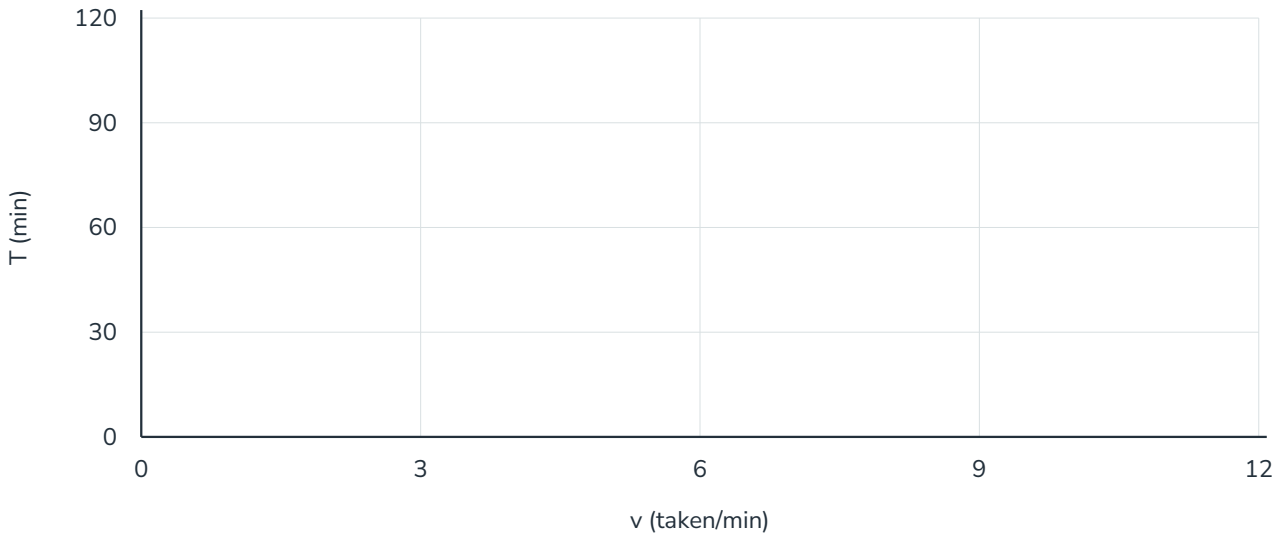
Een apparaat verwerkt 120 taken. Bij een constante snelheid v taken per minuut geldt $T=\frac{120}{v}$.



a Teken T voor $1 \leq v \leq 12$ en beschrijf de vorm.

10 Geen oneindige snelheid (vervolg)

Een apparaat verwerkt 120 taken. Bij een constante snelheid v taken per minuut geldt $T=\frac{120}{v}$.



b Waarom is v=0 uitgesloten en welke grens nadert T bij zeer grote v?

11 Een domein bij verdeling

Zesenzestig tafels worden verdeeld over n zalen volgens $B=\frac{66}{n}$. Alle zalen krijgen evenveel hele tafels.

a Welke beperking heeft n naast positief en geheel?

b Waarom teken je voor deze situatie niet iedere positie op de gladde kromme als een uitvoerbare oplossing?

12 Een vaste opstarttijd

Een printer heeft verwerkingstijd $T=5+\frac{180}{q}$ minuten, waarbij q het aantal pagina's per minuut is.

a Is T omgekeerd evenredig met q? Controleer met twee waarden.

b Welke horizontale grens nadert de grafiek en wat betekent dat?

13 Een capaciteit begrenst het model

Een rij machines verwerkt samen volgens het model $T=\frac{240}{n}$ minuten. Er passen hoogstens 12 machines in de werkplaats.

a Bepaal het kleinste modeltijdstip dat praktisch mogelijk is.

b Waarom is de horizontale asymptoot 0 hier geen haalbare werktijd?

14 Omgekeerd is niet negatief

Een leerling zegt: bij omgekeerde evenredigheid is de grafiek altijd een rechte dalende lijn.

a Geef met $y=\frac{24}{x}$ een tegenvoorbeeld.

b Welke eigenschap is wel kenmerkend?

15 Nieuwe verhouding

Een vloeistof heeft massa 18 kg bij 12 liter. Massa en volume zijn recht evenredig.

a Stel de formule op en bereken de massa bij 7,5 liter.

b Welke waarden van V zijn in een vat van 20 liter toegestaan?

c Welke constante verhouding kenmerkt dit verband? Wat gebeurt met de massa als het volume met factor 1,4 toeneemt?

16 Nieuwe omgekeerde verhouding

Bij een debiet van 15 liter per minuut is de vultijd 36 minuten. De pomp kan tussen 10 en 30 liter per minuut leveren.

a Stel de formule op en bepaal het bereik van de vultijd.

b Een wens is hoogstens 16 minuten. Is die binnen dit model uitvoerbaar?

c Beschrijf de grafiek en haar wiskundige asymptoten. Zijn die asymptoten binnen dit praktische domein bereikbaar?

11.2 Parameters en formules vergelijken

Leerdoel

Ik kan de betekenis en het effect van een parameter in een formule of grafiek beschrijven.

Theorie

Een parameter heeft een vaste rol

Een parameter is binnen één model constant, maar kan tussen modellen verschillen. In a+bx is a de beginwaarde en b de verandering per x-eenheid.

In $b \times g^t$ bepaalt b de starthoeveelheid en g het groeitempo. Beschrijf het effect van een parameter terwijl de andere parameters gelijk blijven. Zie voorbeeld 11.2A, Voorbeelden blz. 3.

Onthoud: Verander bij een vergelijking één parameter tegelijk.

1 Een starttarief aanpassen

Een huurprijs is K(x)=a+3x euro, met x het aantal uren.

a Beschrijf de betekenis van a en het effect van een stijging van a met 5.

b Verandert hierdoor het verschil tussen huren voor 4 en 9 uur?

2 Een tarief per uur aanpassen

K(x)=12+bx voor x≥0.

a Wat verandert als b van 4 naar 6 gaat?

b Bij welk aantal uren is het nieuwe tarief €18 duurder?

3 Een groeiparameter

Een model is $N(t)=200 \times g^t$, met $g>0$.

a Vergelijk het gedrag bij $g=0{,}9$; $g=1$; $g=1{,}1$.

b Verandert verdubbelen van 200 de groeifactor of verdubbelingstijd?

4 Een verschoven kromme

$T(q)=c+\frac{120}{q}$, met $q>0$.

a Geef de betekenis van c als T een verwerkingstijd is.

b Hoe veranderen T(10) en T(20) als c met 2 wordt verhoogd?

Een onbekende parameter bepalen

Leerdoel

Ik kan een onbekende parameter uit een gegeven punt of een contextvoorwaarde bepalen.

Theorie

Een onbekende parameter bepalen

Vul een gegeven punt of contextvoorwaarde in de formule in. Los de vergelijking voor de onbekende parameter op en controleer het punt.

Voor twee onbekende parameters zijn doorgaans twee onafhankelijke voorwaarden nodig. Niet iedere extra meting hoeft exact bij het model te passen. Zie voorbeeld 11.2A, blz. 769.

Onthoud: Bepalen en controleren horen bij elkaar.

5 Een punt bepaalt de parameter

Een lineair model is $y=ax+7$ en gaat door $(6,25)$.

a Bepaal a en controleer.

b Kan dezelfde formule ook door $(10,39)$ gaan?

6 Een factor uit één later punt

$N(t)=80 \times g^t$ en $N(3)=135$.

a Bereken g.

b Bereken de voorspelling voor $t=6$ zonder eerst g af te ronden.

7 Een omgekeerde formule ijken

$T(q)=4+\frac{k}{q}$. Bij $q=12$ is $T=19$.

a Bereken k.

b Welke q geeft $T=10$?

8 Twee parameters bepalen

$K(x)=a+bx$. $K(4)=38$ en $K(10)=65$.

a Bepaal a en b.

b Controleer beide waarden en geef betekenis aan de parameters als K een huurprijs is.

Dezelfde variabele en eenheid

Leerdoel

Ik kan formules combineren of omwerken en daarmee twee modellen op dezelfde grootheid vergelijken.

Theorie

Dezelfde variabele en eenheid

Bij een formuleketen vervang je een tussenvariabele door haar uitdrukking. Schrijf daarna duidelijk welke grootheid de uitkomst weergeeft.

Voordat je modellen vergelijkt, maak je variabelen en eenheden gelijk. Een uurcoëfficiënt kun je niet rechtstreeks met een minuutcoëfficiënt vergelijken. Zie voorbeeld 11.2B, blz. 770.

Onthoud: Eerst omrekenen, dan vergelijken.

9 Een formuleketen

Een machine produceert $x=18t$ onderdelen in t uur. De totale kosten zijn $K=75+2{,}4x$ euro.

a Stel K rechtstreeks als functie van t op.

b Welke variabele moet je gelijk houden bij vergelijken met een andere uurkostenformule?

10 Twee eenheden, één vergelijking

Aanbieder A rekent $K_A=15+6h$ euro met h in uren. Aanbieder B rekent $K_B=24+0{,}075m$ euro met m in minuten.

a Schrijf beide formules met h en bepaal wanneer de kosten gelijk zijn.

b Welke aanbieder is bij 8 uur goedkoper?

11 Een gemiddelde prijs

De totale kosten zijn $K(x)=180+3x$ voor $x>0$.

a Schrijf de gemiddelde kosten per stuk als formule $G(x)$.

b Welke horizontale grens hoort bij G en hoe interpreteer je die?

12 Dezelfde grootheid vergelijken

Model A geeft volume $V=2{,}5t$ liter. Model B geeft massa $M=3t$ kilogram. Voor de vloeistof geldt $M=1{,}2V$.

a Druk model A ook uit in massa.

b Waarom is 2,5 kleiner dan 3 geen bewijs dat model A langzamer groeit?

13 Twee formules combineren

Een opslag heeft inhoud $V=5n$ liter voor n bakken. De massa van die inhoud is $M=0{,}8V$ kilogram.

a Stel $M(n)$ op en bereken hoeveel bakken bij 200 kg horen.

b Iedere lege bak weegt 0,6 kg. Pas de formule aan voor de totale massa inclusief bakken.

Een parameter aan een eis aanpassen

Leerdoel

Ik kan een modelparameter zo kiezen dat een gegeven doel of grens wordt bereikt en de uitkomst controleren.

Theorie

Een parameter aan een eis aanpassen

Vertaal een doel of grens in een vergelijking of ongelijkheid. Bepaal de parameterwaarden die voldoen en combineer deze met het contextdomein.

Controleer een grenswaarde én een waarde daarbuiten. Een eis op één invoerwaarde geldt niet vanzelf voor alle invoerwaarden. Zie voorbeeld 11.2B, blz. 770.

Onthoud: Een parameterkeuze moet de concrete eis aantoonbaar halen.

14 Een doelwaarde instellen

Een tarief is K(x)=a+2,5x. Bij 16 stuks mag de prijs hoogstens €60 zijn; a≥0.

a Bepaal welke waarden van a voldoen.

b Controleer de maximale a bij 15 en 17 stuks en benoem de reikwijdte van de eis.

15 Een parameter verkeerd behandeld

K(x)=a+4x. Een leerling wil het tarief voor ieder x 10% verlagen en verandert alleen a in 0,9a.

a Waarom is dat niet voor alle x een daling van 10%?

b Schrijf de juiste nieuwe formule.

16 Een nieuwe doelwaarde

$N(t)=120 \times g^t$. Na 4 perioden moet N precies 240 zijn.

a Bepaal g en het groeipercentage per periode.

b Welke g geeft na 4 perioden hoogstens 240 bij gelijkblijvende positieve beginwaarde?

c Wat verandert aan de grafiek als alleen de beginwaarde van 120 naar 180 gaat en g gelijk blijft?

17 Een nieuwe combinatie

$K=30+bx$ euro; bij $x=20$ is $K=110$. De productie is $x=5t$.

a Bepaal b en schrijf K als functie van t.

b Binnen welk tijdsinterval blijven de kosten hoogstens €150 als $t \geq 0$?

18 Een verschuiving en een grens

$T(q)=a+\frac{240}{q}$, met $10 \leq q \leq 60$. Voor de kleinste uitvoerbare tijd wordt 9 minuten gemeten.

a Bepaal a.

b Welke q geeft $T \leq 13$?

11.3 Grafieken, vergelijkingen en toegestane gebieden

Leerdoel

Ik kan de vier standaardverbanden zonder ICT globaal schetsen en een nauwkeurige grafiek met passende assen, schaal, domein en relevante punten maken.

Theorie

Schetsen en nauwkeurig tekenen

Een schets laat het type verband, stijgen of dalen en belangrijke snijpunten zien. Voor een nauwkeurige grafiek bereken je geschikte punten en kies je passende assen met eenheden.

Controleer het domein. Een recht evenredige grafiek gaat door de oorsprong; een omgekeerd evenredige grafiek heeft bij positieve waarden twee assen als asymptoten. Zie voorbeeld 11.3A, blz. 771.

Onthoud: Een goede grafiek maakt zowel vorm als relevante waarden leesbaar.

1 Vier standaardvormen

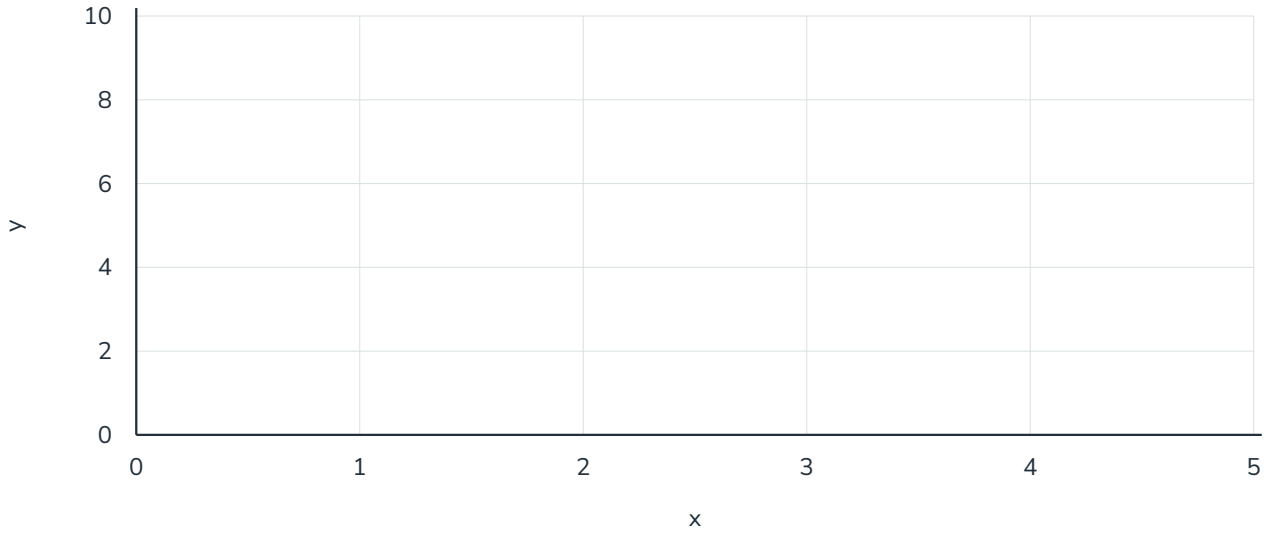
Gegeven zijn $y=3x$, $y=3x+4$, $y=\frac{18}{x}$ en $y=2\times1{,}5^x$. Gebruik bij de derde formule $x>0$.

a Schets de vier grafieken zonder rekenmachine en benoem het type.

b Noem per formule een punt waarmee je de schets kunt controleren.

2 Een rechte tekenen

$y=-2x+10$ voor $0 \leq x \leq 5$.

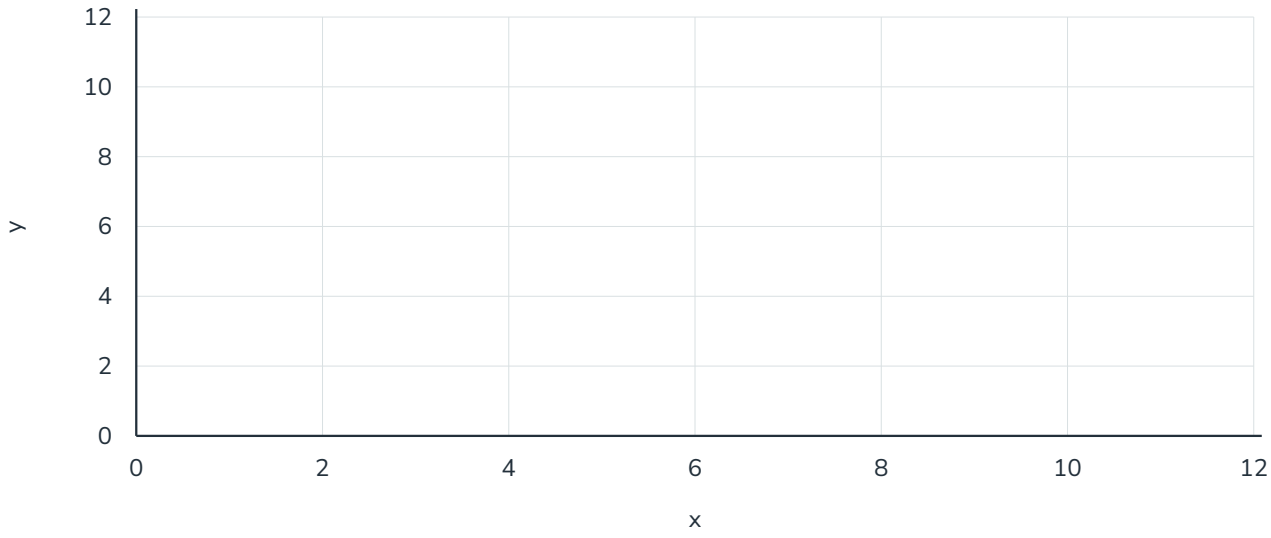


a Teken een nauwkeurige grafiek op het rooster. Geef de relevante punten aan.

b Bepaal de snijpunten met de assen.

3 Een afnemende kromme

$y=\frac{24}{x}$ voor $2 \leq x \leq 12$.

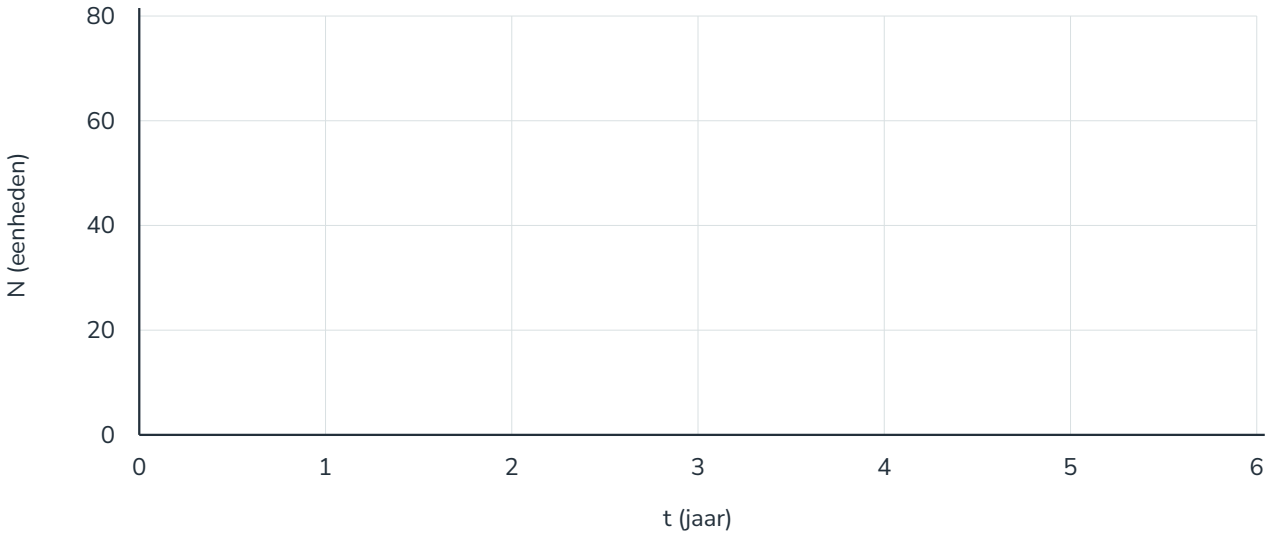


a Teken een nauwkeurige grafiek op het rooster. Geef de relevante punten aan.

b Waarom is het onjuist de punten met één rechte lijn te verbinden?

4 Een exponentiële grafiek

$N(t)=20\times1{,}25^t$ voor $0\leq t\leq 6$.



a Teken een nauwkeurige grafiek op het rooster. Geef de relevante punten aan.

b Beschrijf het stijgingsgedrag en verklaar het met het model.

5 Een grafiek met een sprong

Een taxi rekent €6 starttarief plus €2 voor ieder begonnen blok van 1 km. Bij afstand 0 is alleen €6 verschuldigd; een rit heeft maximaal 4 km.

a Bereken de prijs bij 0,8 km,1,0 km en 1,01 km.

b Waarom past één doorlopende rechte lijn niet exact bij deze prijsafspraak?

Vergelijkingen en ongelijkheden

Leerdoel

Ik kan een vergelijking of ongelijkheid exact waar mogelijk en anders numeriek of grafisch oplossen en de uitkomst controleren.

Theorie

Vergelijkingen en ongelijkheden

Een vergelijking zoekt gelijke waarden; een ongelijkheid zoekt een heel gebied aan invoerwaarden. Los exact op waar dat eenvoudig kan, anders met een grafiek, tabel of numerieke oplosfunctie.

Bij delen door een negatief getal keert het ongelijkheidsteken om. Geef na een numerieke oplossing ook vergelijking, contextinterval en controlepunten. Zie voorbeeld 11.3A, blz. 771.

Onthoud: Controleer de oplossing én de kant van de grens.

6 Een kruising berekenen

De modellen zijn $A(x)=18+4x$ en $B(x)=42+2x$.

a Bereken het snijpunt en interpreteer beide coördinaten als x uren en kosten in euro.

b Wanneer is A goedkoper, voor $x\geq 0$?

7 Een negatieve coëfficiënt

Een voorraad wordt beschreven door $V(t)=90-6t$ voor $0\leq t\leq 15$.

a Wanneer is V hoogstens 24?

b Controleer één tijdstip dat wel en één dat niet voldoet.

8 Een grens aan exponentiële groei

$N(t)=60\times 1{,}08^{t}$ voor $t\geq 0$.

a Bepaal wanneer $N=100$ en het eerste gehele tijdstip met $N\geq 100$.

b Welke vergelijking voer je in een numerieke oplosfunctie in?

9 Twee grenspunten

Een opbrengstmodel is $R(x)=-x^2+10x$ voor $0\le x\le 10$.

a Bepaal wanneer $R=16$.

b Voor welke x is R minstens 16?

10 Twee soorten groei vergelijken

$A(t)=100+20t$ en $B(t)=80\times 1{,}2^t$ voor $0\le t\le 10$.

a Bepaal numeriek wanneer de modellen elkaar kruisen.

b Controleer welk model bij $t=5$ en $t=6$ groter is.

11 Een oplossing buiten de context

Een model voor een bak is $V(t)=120-8t$ liter. De bak wordt vanaf $t=0$ geleegd tot hij leeg is.

a Los $V=-40$ algebraïsch op.

b Waarom is dat geen geldige tijd voor dit leegsituatiemodel?

Uiterste waarden in het domein

Leerdoel

Ik kan een maximum of minimum aflezen of numeriek bepalen en in de context interpreteren.

Theorie

Uiterste waarden in het domein

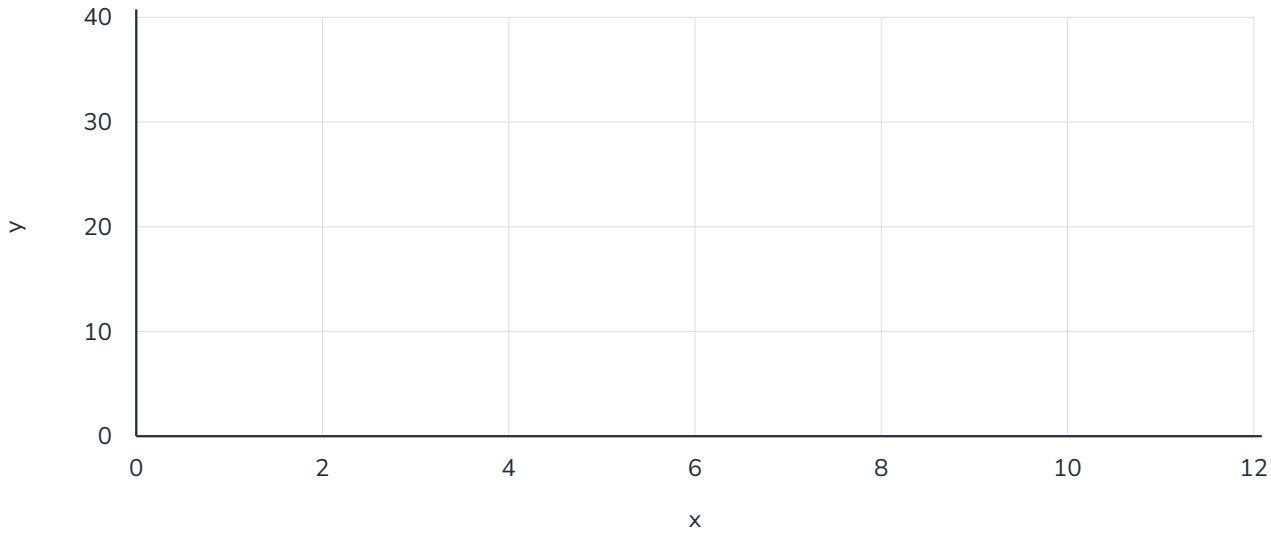
Een maximum of minimum kan bij een top liggen of op een rand van het toegestane interval. Controleer daarom zowel relevante binnenpunten als eindpunten.

Bij hele aantallen is een niet-gehele top geen uitvoerbare keuze. Vergelijk de naburige gehele waarden en eventuele contextgrenzen. Zie voorbeeld 11.3B, blz. 772.

Onthoud: De grootste uitkomst buiten het domein is geen geldig optimum.

12 Een maximum in een grafiek

$P(x)=-x^2+12x$ voor $0\leq x\leq 12$.



a Teken een nauwkeurige grafiek op het rooster. Geef de relevante punten aan.

b Bepaal het maximum en de invoerwaarde waarbij dit bereikt wordt.

13 Een minimum met een vast domein

$K(x)=x^2-10x+40$ voor $2\leq x\leq 9$.

a Bepaal numeriek of grafisch het minimum.

b Wat wordt het minimum als het domein verandert in $7\leq x\leq 9$?

14 Een optimum met hele aantallen

De opbrengst in een model is $R(n)=-2n^2+21n$, met n een geheel aantal tussen 0 en 10.

a Bepaal het maximum voor gehele n.

b Waarom is $n=5{,}25$ geen uitvoerbare keuze?

15 Een uiterste op een rand

$C(q)=7+\frac{180}{q}$ voor $10\leq q\leq 30$.

a Bepaal het minimum en maximum van C binnen het domein.

b Is de horizontale asymptoot 7 het minimum in dit domein?

16 Een gevonden top beoordelen

Een rekenmachine geeft voor $f(x)=-x^2+8x+5$ de top(4,21). Een context staat alleen $6\leq x\leq 9$ toe.

a Bepaal het werkelijke maximum binnen deze context.

b Welke controle ontbrak bij de eerste conclusie?

Een doorsnede van voorwaarden

Leerdoel

Ik kan lineaire en andere passende contextvoorwaarden in twee variabelen als een begrensd toegestaan gebied in een assenstelsel weergeven, de doorsnede bepalen en grenspunten controleren.

Theorie

Een doorsnede van voorwaarden

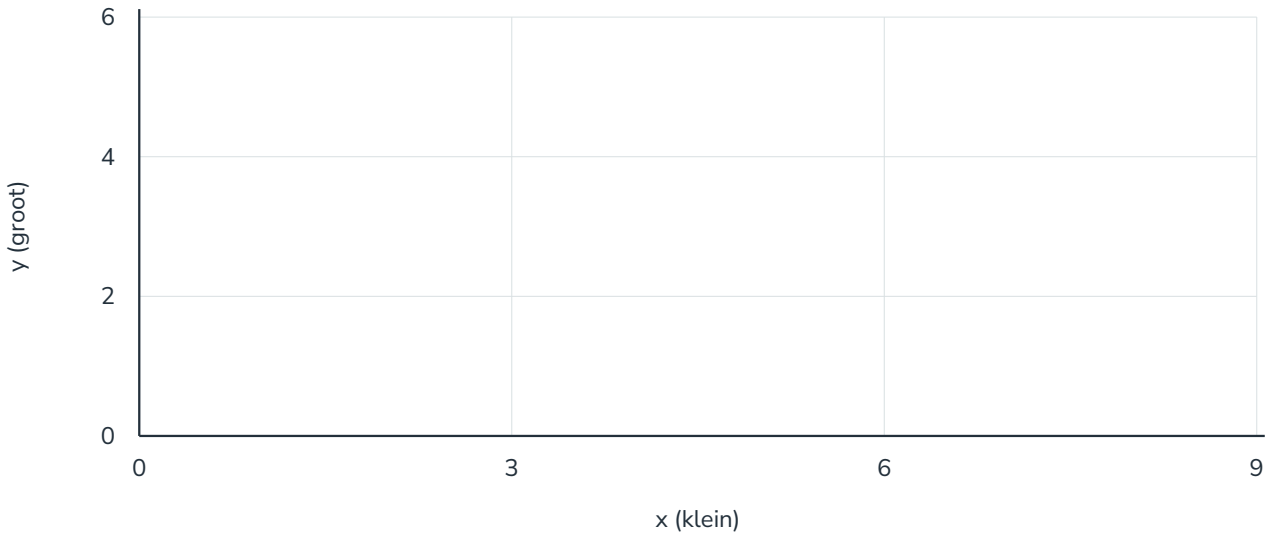
Teken elke grens en bepaal met een proefpunt welke kant voldoet. Het toegestane gebied is de doorsnede van alle voorwaarden, inclusief grenzen met ≤ of ≥.

Controleer hoekpunten door invullen. Soms is een grens een kromme, zoals $xy \geq 12$. Bij aantallen zijn alleen gehele punten binnen het gebied uitvoerbaar. Zie voorbeeld 11.3B, blz. 772.

Onthoud: Een punt moet aan alle voorwaarden tegelijk voldoen.

17 **Een budgetgebied**

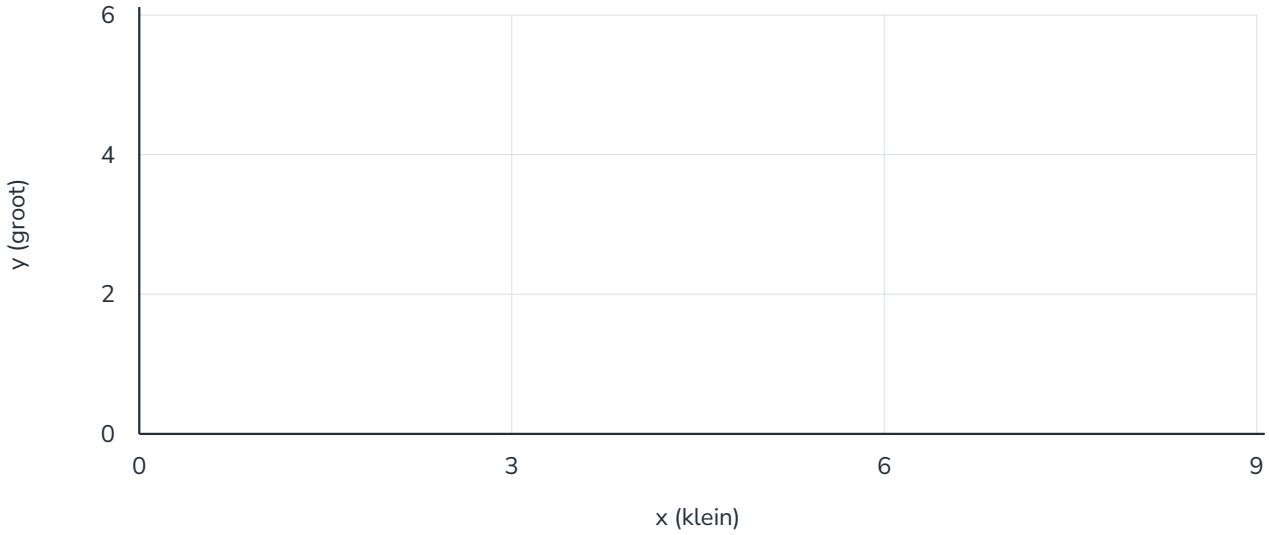
Een werkplaats maakt x kleine en y grote houders. $x \geq 0$, $y \geq 0$, en $2x+3y \leq 18$; voor een eerste model mogen x en y reëel zijn.



a Teken de grenslijn en geef het toegestane gebied aan.

17 Een budgetgebied (vervolg)

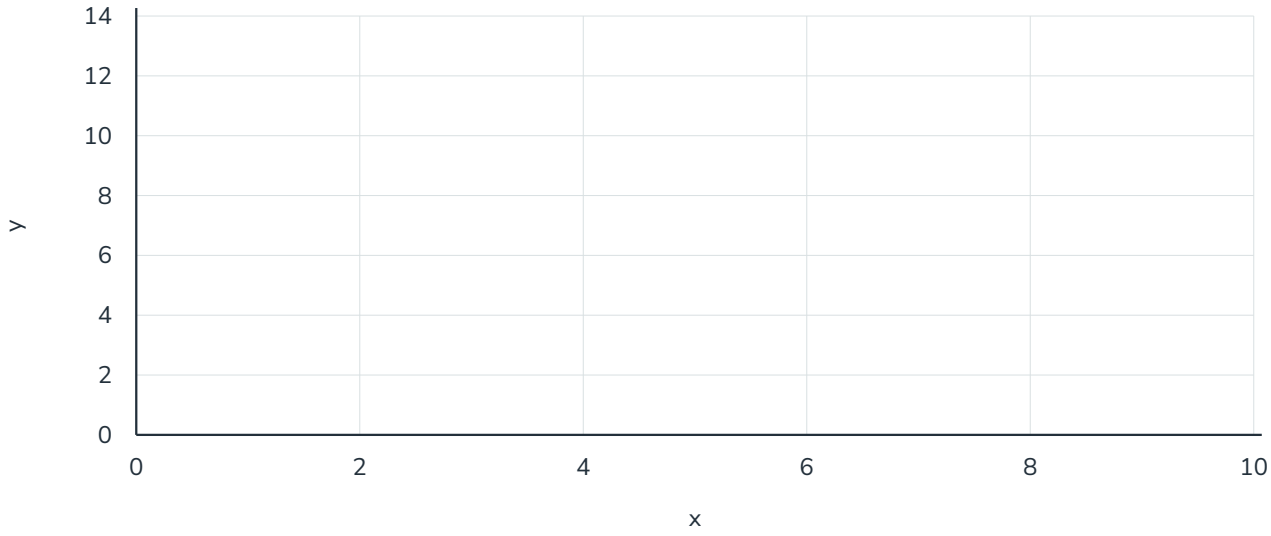
Een werkplaats maakt x kleine en y grote houders. $x \geq 0$, $y \geq 0$, en $2x+3y \leq 18$; voor een eerste model mogen x en y reëel zijn.



b Controleer(3,4) en(4,4).

18 Twee beperkingen combineren

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 10$ en $2x+y \leq 14$.

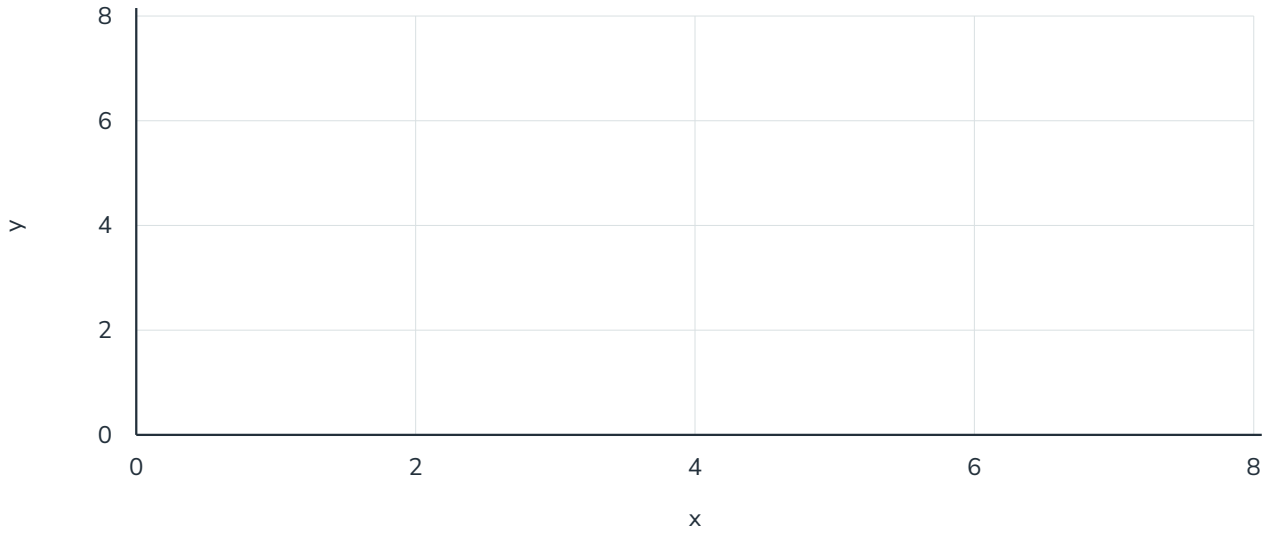


a Bereken alle hoekpunten van de doorsnede.

b Teken het toegestane gebied en controleer(5,4).

19 Een minimumaantal

Een rooster vraagt $x \geq 2$, $y \geq 1$ en $x+y \leq 8$.

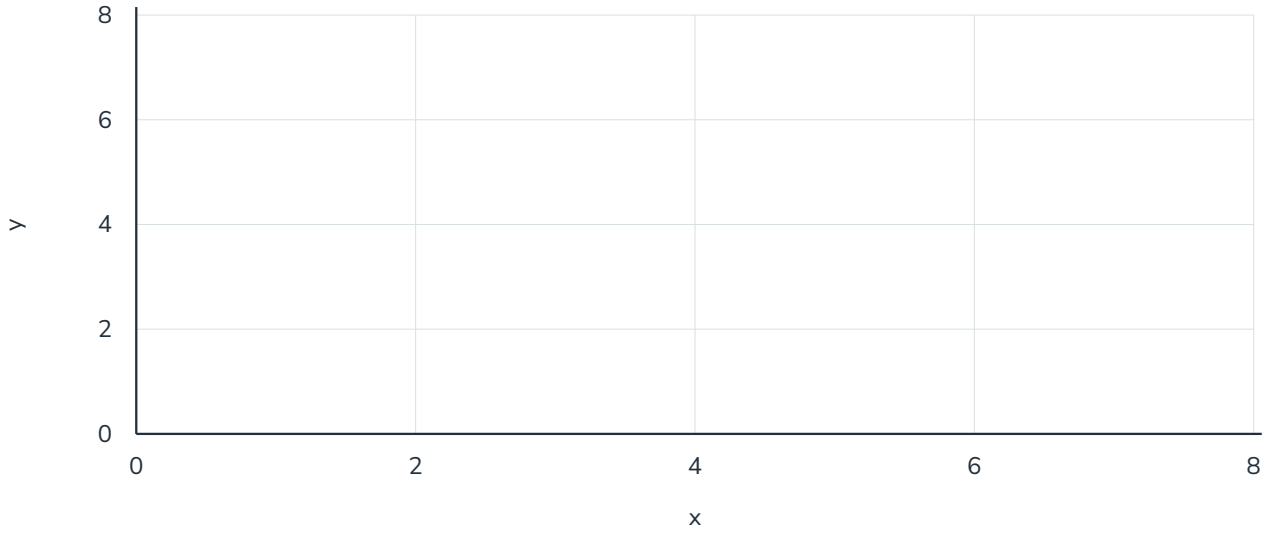


a Bepaal de hoekpunten en teken de doorsnede.

b Hoeveel gehele paren (x, y) voldoen?

20 Een niet-lineaire voorwaarde

Een rechthoek heeft zijden x>0 en y>0. De oppervlakte moet minstens 12 zijn; de somx+ymag hoogstens 8 zijn.



a Schrijf de grenzen als y-functies en bepaal hun snijpunten.

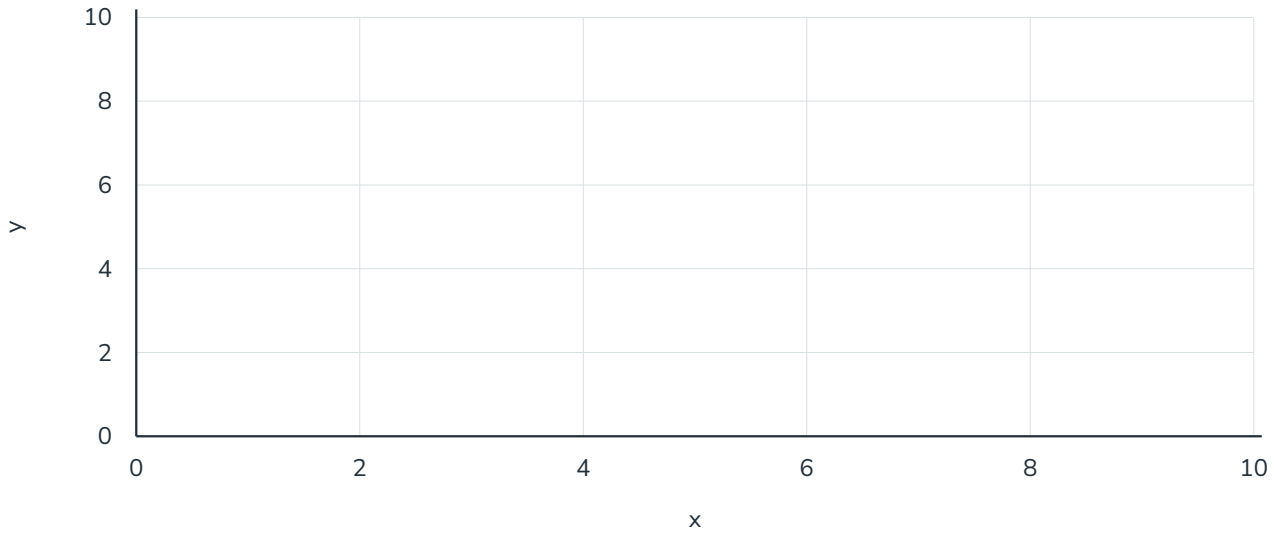
b Teken het toegestane gebied en controleer(4,3) en(1,7).

21 Een nieuwe doorsnede

De voorwaarden zijn $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 6$ en $y \leq 9 - x$.

a Bepaal de hoekpunten van het toegestane gebied.

b Is (6,4) toegestaan? Onderbouw met de beperkende voorwaarde.



c Teken de grenzen en het toegestane gebied in een passend assenstelsel.

22 Een gemengde grens

Een model heeft $f(x) = \frac{40}{x} + 2$ voor $2 \leq x \leq 10$.

a Bepaal voor welke x geldt $f(x) \leq 7$.

b Bepaal het minimum van f binnen het domein.

23 Een gemengde grafiekvraag

Gegeven zijn $f(x)=2x+3$ en $g(x)=15-x$ voor $0\leq x\leq 10$.

a Bereken het snijpunt en de oplossing van $f(x)\leq g(x)$.

b Welk gebied voldoet aan $y\geq f(x)$, $y\leq g(x)$ en $x\geq 0$?

c Schets daarnaast $y=2x$, $y=2x+3$, $y=\frac{12}{x}$ met $x>0$ en $y=3\times 1{,}5^x$. Geef per grafiek één kenmerk waarmee je de vorm controleert.

24 Een optimum en een beperking

$R(x)=-x^2+14x$, met x geheel en $2\leq x\leq 6$.

a Bepaal het maximaal mogelijke resultaat.

b Een extra voorwaarde luidt $3x\leq 15$. Hoe verandert de keuze?

11.4 Modelkeuze en wiskundig redeneren

Leerdoel

Ik kan een passend model kiezen bij gegevens en een onderzoeksvraag en de keuze onderbouwen.

Theorie

Kiezen op basis van kenmerken

Kies het model dat past bij de vraag, het gegevenspatroon en de context. Vergelijk constante verschillen, verhoudingen of producten en bekijk of een vaste beginwaarde nodig is.

Controleer meerdere punten. Het best passende model is niet automatisch een natuurwet of een betrouwbare voorspeller voor elke toekomstige situatie. Zie voorbeeld 11.4A, blz. 773.

Onthoud: Een modelkeuze vraagt een berekening én een inhoudelijke reden.

1 Welk patroon past?

Bij x=1,2,4 zijn de uitkomsten y=48,24,12.

a Kies een passend standaardmodel en stel de formule op.

b Voorspel y bij x=3 en controleer het constante kenmerk.

2 Een nulmeting weegt mee

De meetpunten zijn(0,8),(2,14),(5,23).

a Kies een lineair model en controleer alle punten.

b Waarom is recht evenredig hier geen passende keuze?

3 Korte en lange termijn

Een apparaat kost €500 in aanschaf en €0,12 per gebruik. Een alternatief kost €200 en €0,20 per gebruik.

a Stel twee totale-kostenmodellen op en bepaal de grens.

b Welk model is voor 5000 gebruiken voordeliger, en welke aanname hoort erbij?

Verschillende voorstellingen controleren

Leerdoel

Ik kan een voorspelling met verschillende voorstellingen controleren en tegenstrijdige uitkomsten onderzoeken.

Theorie

Verschillende voorstellingen controleren

Vul dezelfde invoerwaarde in de formule, lees die in de tabel en zoek haar in de grafiek. Houd eenheden, nulpunt en schaal gelijk.

Onderzoek een tegenspraak voordat je gegevens wijzigt. Afronding, een andere as of verschillende meetafspraken kunnen een verschil verklaren. Zie voorbeeld 11.4A, blz. 773.

Onthoud: Een tweede route helpt fouten ontdekken.

4 Tabel en formule spreken elkaar tegen

Een formule zegt K=25+4x. Een tabel vermeldt bij x=5 een prijs van €43.

a Laat zien waar de tegenspraak zit.

b Noem twee controles voordat je één van beide stilzwijgend wijzigt.

5 Een voorspelling via twee routes

$N(t)=150\times1{,}06^t$. Een verslag berekent na 2 perioden 168,54.

a Controleer via herhaald vermenigvuldigen.

b Waarom geeft 150+2×9 een andere uitkomst?

6 De as verkeerd gelezen

Een grafiek met een logaritmische y-as heeft een punt halverwege 100 en 1000. Een tabel bij hetzelfde punt geeft 316,2.

a Onderzoek of grafiek en tabel strijdig zijn.

b Welke onjuiste berekening zou een schijnbare tegenspraak opleveren?

Een uitkomst terugvertalen

Leerdoel

Ik kan uitkomsten interpreteren met eenheden, afronding, aannames en een passend geldigheidsgebied.

Theorie

Een uitkomst terugvertalen

Geef een antwoord met grootheid, eenheid en passende afronding. Hele rollen of deelnemers vragen soms naar boven of beneden afronden; controleer de grens.

Noem het geldigheidsgebied en relevante aannames. Een uitkomst die een fysieke grens overschrijdt is geen uitvoerbare voorspelling. Zie voorbeeld 11.4B, blz. 774.

Onthoud: De context bepaalt welke uitkomst bruikbaar is.

7 Afronding bepaalt de bestelling

Een project vraagt 2480 meter lint. Elke rol bevat 75 meter; alleen hele rollen worden verkocht.

a Bereken hoeveel rollen nodig zijn.

b Hoeveel lint blijft dan over en welke praktische aanname maakt de berekening?

8 Buiten de meetperiode

Een model voor bezoekers is $N(t)=400+35t$ voor $0 \leq t \leq 6$ maanden. De zaalcapaciteit is 900.

a Bereken de modelvoorspelling voor maand 20.

b Waarom mag dit niet zonder beperking als verwacht bezoekersaantal worden gepresenteerd?

9 Een hoeveelheid en een snelheid

Een pomp heeft debiet $q=\frac{1{,}8\text{m}^3}{\text{uur}}$ en werkt 45 minuten.

a Bereken het gepompte volume in liters.

b Een leerling krijgt 81 liter door $1{,}8\times45$ te rekenen. Geef een eenhedencontrole.

Een claim onderbouwen of weerleggen

Leerdoel

Ik kan een modelclaim beoordelen met een berekening, een tegenvoorbeeld of een onderbouwde redenering.

Theorie

Een claim onderbouwen of weerleggen

Een algemene claim kun je weerleggen met één geldig tegenvoorbeeld. Een paar passende voorbeelden bewijzen de algemene claim niet.

Gebruik een berekening, een betekenisvolle vergelijking of een duidelijke redenering. Schrijf welke aanname jouw conclusie nodig heeft. Zie voorbeeld 11.4B, blz. 774.

Onthoud: Controleer ook de bewering achter de berekening.

10 Een claim met een tegenvoorbeeld

Een onderzoeker zegt: als twee modellen bij t=0 en t=1 gelijk zijn, blijven ze later gelijk.

a Geef met $L(t)=20+10\,t$ en $E(t)=20\times1{,}5^t$ een tegenvoorbeeld.

b Welke zwakkere conclusie is wel verantwoord?

11 Een verborgen startbedrag

Iemand noemt $K=8+2x$ een evenredig model, want het bedrag stijgt steeds met 2.

a Verbeter de modelnaam en geef een tegenvoorbeeld voor evenredigheid.

b Welke aanpassing maakt het model wel recht evenredig?

12 Nieuwe modelkeuze

Bij t=0, 2 en 4 zijn respectievelijk 100, 144 en 207,36 eenheden gemeten.

a Kies een model en bereken de factor per tijdseenheid.

b Controleer de derde meting en geef één beperking van een voorspelling ver buiten dit interval.

c Een leerling beweert dat een lineair model door de eerste twee punten ook bij de derde meting past. Onderzoek deze claim.

13 Nieuwe controle op een grens

Een kostenmodel is K(n)=180+7,5n; het budget is €1000 en n moet geheel zijn.

a Bepaal het grootste toegestane aantal.

b Controleer de grens en de eenheid van de uitkomst.

14 Een daling beoordelen

Een model voor reparatietijd is $T(n)=12+\frac{240}{n}$, met n het aantal onderdelen dat tegelijk wordt behandeld en $1 \leq n \leq 20$.

a Bepaal de laagste modeltijd en benoem de uitvoerbare keuze.

b Een verslag noemt 12 minuten als minimaal haalbaar. Leg uit waarom dat onjuist is.

Gemengd oefenen

1 Een evenredigheid opnieuw

Een vast bedrag van €360 wordt onder deelnemers verdeeld.

a Geef de formule en bereken het bedrag per persoon bij 15 deelnemers.

b Bereken het minimale aantal als per persoon hoogstens €22 betaald mag worden.

2 Een parameter opnieuw

$y=ax+9$ gaat door$(5,29)$.

a Bepaal a.

b Welke x geeft $y=61$?

3 Een gebied opnieuw

$x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 12$ en $x\leq 5$.

a Bepaal de hoekpunten.

b Controleer$(5,8)$.

4 Een modelclaim opnieuw

$E(t)=100\times 0{,}9^t$.

a Bereken $E(2)$ en procentuele afname over 2 perioden.

b Beoordeel de claim dat de hoeveelheid elke keer met 10 eenheden afneemt.

Gericht verder oefenen

5 Herstel een verhouding

$y=\frac{96}{x}$ voor $x>0$.

a Bereken y bij $x=6$ en $x=12$.

b Beschrijf het constante kenmerk.

6 Herstel een parameter

$K=a+5x$ en $K(7)=50$.

a Bepaal a en controleer.

b Wat wordt de formule als alle kostendelen 20% lager worden?

7 Herstel een grens

Een model $q(t)=60-4t$ heeft domein $0\leq t\leq 15$.

a Los $q(t)\leq 12$ op.

b Controleer de grens en $t=11$.

Nieuwe controle

8 Nieuwe parametercontrole

Een model $T(q)=a+\frac{150}{q}$ geeft bij $q=10$ de waarde 22.

a Bepaal a en bereken T(30).

b Bepaal q als T=10.

9 Nieuwe modelcontrole

Een voorspelling is $N(t)=80\times1{,}1^t$. De capaciteit is 120.

a Bepaal het eerste gehele tijdstip waarop het model de capaciteit overschrijdt.

b Geef een zorgvuldige conclusie over het gebruik van het model daarna.

Leerdoelenoverzicht

11.1 · Leerdoel 1: Ik kan uit tekst, tabel, grafiek of formule bepalen of grootheden recht of omgekeerd evenredig zijn.

11.1 · Leerdoel 2: Ik kan de evenredigheidsconstante bepalen en een passende formule opstellen.

11.1 · Leerdoel 3: Ik kan waarden, schaaleffecten en ontbrekende gegevens bij recht of omgekeerd evenredige verbanden berekenen.

11.1 · Leerdoel 4: Ik kan de grafiek, het domein en eventuele asymptoten vanuit de context interpreteren.

11.2 · Leerdoel 1: Ik kan de betekenis en het effect van een parameter in een formule of grafiek beschrijven.

11.2 · Leerdoel 2: Ik kan een onbekende parameter uit een gegeven punt of een contextvoorwaarde bepalen.

11.2 · Leerdoel 3: Ik kan formules combineren of omwerken en daarmee twee modellen op dezelfde grootheid vergelijken.

11.2 · Leerdoel 4: Ik kan een modelparameter zo kiezen dat een gegeven doel of grens wordt bereikt en de uitkomst controleren.

11.3 · Leerdoel 1: Ik kan de vier standaardverbanden zonder ICT globaal schetsen en een nauwkeurige grafiek met passende assen, schaal, domein en relevante punten maken.

11.3 · Leerdoel 2: Ik kan een vergelijking of ongelijkheid exact waar mogelijk en anders numeriek of grafisch oplossen en de uitkomst controleren.

11.3 · Leerdoel 3: Ik kan een maximum of minimum aflezen of numeriek bepalen en in de context interpreteren.

11.3 · Leerdoel 4: Ik kan lineaire en andere passende contextvoorwaarden in twee variabelen als een begrensd toegestaan gebied in een assenstelsel weergeven, de doorsnede bepalen en grenspunten controleren.

11.4 · Leerdoel 1: Ik kan een passend model kiezen bij gegevens en een onderzoeksvraag en de keuze onderbouwen.

11.4 · Leerdoel 2: Ik kan een voorspelling met verschillende voorstellingen controleren en tegenstrijdige uitkomsten onderzoeken.

11.4 · Leerdoel 3: Ik kan uitkomsten interpreteren met eenheden, afronding, aannames en een passend geldigheidsgebied.

11.4 · Leerdoel 4: Ik kan een modelclaim beoordelen met een berekening, een tegenvoorbeeld of een onderbouwde redenering.

Eindevaluatie

Kijk je werk na met de uitwerkingen. Noteer per leerdoel een opgave die goed ging en een opgave die nog oefening vraagt.

Werk het passende onderdeel opnieuw door. Maak daarna een nieuwe controleopgave zonder je eerdere uitwerking erbij. Controleer of je aanpak nu klopt.

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
Test jezelf opgave 10a-d	Evenredigheid, formule en praktisch domein	Gericht verder oefenen opgave 5; 11.1 opgave 10a-b en 11a-b	11.1 opgave 16a-c
Test jezelf opgave 11a-d	Parameters en tarieven op één eenheid	Gericht verder oefenen opgave 6; 11.2 opgave 10a-b	Nieuwe controle opgave 8a-b; 11.2 opgave 16b en 17a-b
Test jezelf opgave 12a-c	Grafiek, ongelijkheid en optimum	Gericht verder oefenen opgave 7; 11.3 opgave 1, 3, 12 en 13	11.3 opgave 22a-b en 23a-c
Test jezelf opgave 12d	Een toegestaan gebied uit voorwaarden maken	11.3 opgave 17a-b en 18a-b	11.3 opgave 21a-c
Test jezelf opgave 13a-d	Modelkeuze, controle en extrapolatie	11.4 opgave 4a-b en 10a-b	Nieuwe controle opgave 9a-b; 11.4 opgave 12a-c

Voorbeeld 11.1A

Een vaste hoeveelheid verdelen

Bij 8 personen kost een activiteit €27 per persoon; de totale kosten blijven gelijk.

a Stel een formule op voor het bedrag B bij n personen.

1. Wat zoek ik?

Het bedrag per persoon bij een ander aantal deelnemers.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De totale rekening is het constante product nB.

3. Berekening

$k=8\times27=216$.

4. Antwoord in context

$B=\frac{216}{n}$ euro, met n een positief geheel aantal.

5. Controle

Bij n=8 volgt weer €27.

Voorbeeld 11.1B

Een hogere snelheid

Voor een vaste route is $T=\frac{150}{v}$ uur. De snelheid stijgt van 60 naar 75 $\frac{\text{km}}{\text{uur}}$.

a Bereken het effect op de reistijd.

1. Wat zoek ik?

De nieuwe tijd en procentuele verandering.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Tijd is omgekeerd evenredig met snelheid.

3. Berekening

$T_{oud}=2{,}5$ uur; $T_{nieuw}=2$ uur; $\frac{2}{2{,}5}=0{,}8$.

4. Antwoord in context

De tijd neemt met 20% af.

5. Controle

De snelheid steeg 25%; de omgekeerde factor is $\frac{1}{1{,}25}=0{,}8$.

Voorbeeld 11.2A

Een vast en variabel deel

$K=12+bx$ en $K(8)=48$.

a Bepaal b en leg de eenheid uit als xhet aantal uren is.

1. Wat zoek ik?

Het bedrag per extra uur.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vul het gegeven punt in.

3. Berekening

$48=12+8b; 36=8b$; $b=4,5$.

4. Antwoord in context

De prijs per uur is €4,50.

5. Controle

$12+8\times4,5=48$; het punt wordt teruggevonden.

Voorbeeld 11.2B

Een prijsgrens

K=a+3x. Bij x=25 moet K hoogstens 100 zijn en a≥0.

a Welke waarden van a voldoen?

1. Wat zoek ik?

Alle toegestane startbedragen.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vertaal de eis naar een ongelijkheid.

3. Berekening

a+75≤100, dus a≤25. Samen met a≥0 geeft dit 0≤a≤25.

4. Antwoord in context

Het startbedrag mag tussen €0 en €25 liggen.

5. Controle

Bij a=25 is K=100; bij a=26 is K=101 en dus eis geschonden.

Voorbeeld 11.3A

Een ongelijkheid met context

$A(t)=12+5\,t$ en $B(t)=30+2t$, met $0\le t\le 12$.

a Wanneer is A hoogstens B?

1. Wat zoek ik?

Het toegestane interval voor t.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik stel de ongelijkheid op en combineer met het domein.

3. Berekening

$12+5t\le 30+2t; 3t\le 18$; $t\le 6$.

4. Antwoord in context

$0\le t\le 6$.

5. Controle

Bij $t=0$ voldoet $12\le 30$; bij $t=7$ niet $47\le 44$.

Voorbeeld 11.3B

Een top buiten bereik

$f(x)=-x^2+10x$ voor $6\leq x\leq 9$.

a Bepaal het maximum op dit interval.

1. Wat zoek ik?

De hoogste waarde binnen het gegeven domein.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

De top ligtbij 5; rechts daarvan daalt de grafiek. Ik controleer de eindpunten.

3. Berekening

$f(6)=24$ en $f(9)=9$.

4. Antwoord in context

Het maximum is 24 bij $x=6$.

5. Controle

De hogere topwaarde 25 bij $x=5$ is niet toegestaan.

Voorbeeld 11.4A

Twee passende punten

$L(t)=60+12\,t$ en $E(t)=60\times1{,}2^t$.

a Bewijst overeenstemming op t=0 en 1 dat beide modellen gelijk zijn?

1. Wat zoek ik?

Of gelijkheid op twee punten genoeg is.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik zoek een derde tijdstip als tegenvoorbeeld.

3. Berekening

Bij t=2: L=84 en E=86,4.

4. Antwoord in context

Nee, de modellen verschillen al bij t=2.

5. Controle

Beide modellen geven wel 60 en 72 bij t=0 en 1.

Voorbeeld 11.4B

Een grens aan aantallen

K(n)=45+8n, budget €200, ngeheel.

a Wat is het grootste betaalbare aantal?

1. Wat zoek ik?

Het grootste gehele n met K≤200.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik los de ongelijkheid op en controleer naburige aantallen.

3. Berekening

$n \leq \frac{155}{8} = 19{,}375$; K(19)=197 en K(20)=205.

4. Antwoord in context

Er zijn maximaal 19 stuks betaalbaar.

5. Controle

De 20e stuks overschrijdt het budget;19 voldoet.