HOOFDSTUK 12

Examentraining

Wiskunde A · havo 5



IN DIT HOOFDSTUK LEER JE:

zelf een aanpak kiezen bij onbekende contexten;

berekeningen en statistische conclusies onderbouwen;

je werk controleren en gericht verder oefenen.

Wat weet je nog?

Maak deze vragen vóór de nieuwe leerstof. Noteer je berekeningen en redeneringen. Gebruik een schrift voor je antwoorden. De onderzoeksgegevens zijn voor de oefeningen samengesteld.

1 Een percentage terughalen

Een bedrag stijgt van €80 naar €92.

a Bereken het stijgingspercentage.

b Geef de factor om van 92 terug naar 80 te rekenen.

2 Een grootheid terughalen

Een apparaat verwerkt 6 liter per minuut.

a Bereken de hoeveelheid in 2,5 uur.

b Welke twee eenheden moesten op elkaar worden afgestemd?

3 Verandering herkennen

Een grootheid heeft op drie opeenvolgende dagen de waarden 40, 46 en 52.

a Welke eenvoudige voortzetting past bij deze waarden? Geef de volgende waarde.

4 Een groeifactor

Een hoeveelheid neemt elke maand met 7% af.

a Geef de factor over één maand en over drie maanden.

5 Aandeel en basis

Van 240 ondervraagden kiezen 90 voor plan A.

a Bereken het percentage dat plan A kiest.

b Is daarmee bewezen dat 37,5% van alle inwoners plan A kiest?

6 Spreiding

Twee groepen hebben hetzelfde gemiddelde. Groep A heeft standaardafwijking 3 en groep B standaardafwijking 8.

a Wat zegt dit over de spreiding en wat weet je nog niet?

12.1 Gerichte vaardigheidstraining: rekenen en formules

Leerdoel

Ik kan percentages, verhoudingen, eenheden en afrondingen correct toepassen in een onbekende context.

Theorie

Rekenen in een onbekende context

Bepaal de basis van ieder percentage, de gebruikte verhouding en de betekenis van elke eenheid. Geef eerst de berekening en kies daarna de afronding die de situatie vraagt.

Een verandering in aantallen is iets anders dan een verandering in aandeel. Benoem procenten en procentpunten zorgvuldig. Zie voorbeeld 12.1A, blz. 818.

Onthoud: Kies de basis voordat je rekent.

1 Een korting terugrekenen

Na een korting van 15% kost een werkbank €306.

a Bereken de oorspronkelijke prijs en controleer de korting.

b Waarom geeft 306×1,15 niet het goede antwoord?

2 Twee aandelen

Een vereniging groeit van 240 naar 300 leden. Het aandeel jeugd stijgt van 35% naar 42%.

a Bereken het aantal jeugdleden in beide situaties.

b Vergelijk de groei van het jeugdledenaantal met de verandering van het aandeel.

3 Een mengverhouding

Een concentraat wordt in verhouding 1:7 met water gemengd, waarbij 1 deel concentraat bij 7 delen water komt.

a Bereken hoeveel concentraat voor 18 liter drank nodig is.

b Er is 2 liter concentraat beschikbaar. Hoeveel volledige flessen van 0,75 liter kunnen worden gevuld?

4 Verlies bij bestellen

Voor een vloer is 37,5 m^2 materiaal nodig. Er wordt 8% extra besteld. Een pak bevat 2,2 m^2.

a Bereken het kleinste aantal pakken.

b Hoeveel materiaal is dan beschikbaar boven de oorspronkelijke 37,5m^2?

Formules inzetten

Leerdoel

Ik kan een passende formule gebruiken, omwerken of combineren en tussenstappen zichtbaar noteren.

Theorie

Formules inzetten

Noteer wat de variabelen voorstellen en vervang tussenvariabelen stap voor stap. Werk een formule om door op beide kanten dezelfde bewerking uit te voeren.

Controleer noodzakelijke voorwaarden, zoals een noemer die niet nul mag worden. Zie voorbeeld 12.1A, blz. 818.

Onthoud: Houd haakjes en eenheden zichtbaar.

5 Een formule vrijmaken

$V=\pi r^2 h$, met alle afmetingen positief.

a Maak h vrij en bereken h bij $V=240\pi$ en $r=4$.

b Hoe verandert h bij vast V als r verdubbelt?

6 Formules koppelen

Een strook heeft oppervlakte $A=0{,}8\,L$ en massa $M=1{,}5A$, met L in meters, A in m^2 en M in kg.

a Schrijf M rechtstreeks als functie van L.

b Bereken de maximale lengte bij een massagrens van 25 kg.

7 Een breukmodel

$G=\frac{120}{n}+4$, met $n>0$.

a Maak nvrij.

b Bereken n bij G=10 en controleer.

8 Een formule herzien

Een model voor totale kosten is K=90+2,4x. Alle bedragen stijgen met 5%.

a Schrijf de nieuwe formule in vereenvoudigde vorm.

b Bereken de stijging bij x=150 via twee routes.

Je eigen antwoord controleren

Leerdoel

Ik kan een uitkomst controleren met eenheden, orde van grootte en terugsubstitutie.

Theorie

Je eigen antwoord controleren

Vul een berekende waarde terug in de oorspronkelijke relatie. Kijk of de eenheid klopt en of de orde van grootte mogelijk is.

Een passende controle gebruikt een andere blik op dezelfde gegevens, bijvoorbeeld een verhouding of een grenswaarde. Zie voorbeeld 12.1B, blz. 819.

Onthoud: Een berekening is pas af na interpretatie en controle.

9 Een uitkomst toetsen

Iemand berekent voor een rit van 84 km met gemiddelde snelheid 56 $\frac{\text{km}}{\text{uur}}$ een reistijd van 1,5 minuut.

- **a** Controleer het getal en de eenheid.
- **b** Noem een orde-van-groottecontrole.

10 Een vergelijking controleren

Een leerling vindt bij $5x-12=48$ de oplossing $x=7{,}2$.

- **a** Controleer door substitutie en herstel de oplossing.
- **b** Welke fout is waarschijnlijk gemaakt?

11 Eenheden door de keten

Een rol bevat 1250 gram materiaal met oppervlaktemassa $\frac{250\text{g}}{\text{m}^2}$.

- **a** Bereken het beschikbare oppervlak en controleer de eenheden.
- **b** Er wordt 20% oppervlakteverlies verwacht. Hoeveel bruikbaar oppervlak blijft?

Gericht herstel aantonen

Leerdoel

Ik kan op basis van een foutenanalyse een passende herstelroute kiezen en aantonen dat de fout bij een nieuwe vraag is hersteld.

Theorie

Gericht herstel aantonen

Benoem de concrete fout: verkeerde basis, eenheid, omwerking of afronding. Zoek het bijbehorende onderdeel terug en maak een nieuwe vraag zonder de oude uitwerking.

Vergelijk daarna met het antwoordmodel en wijs aan welke stap nu wel klopt. Zelfvertrouwen alleen is geen bewijs van herstel. Zie voorbeeld 12.1B, blz. 819.

Onthoud: Een nieuwe correcte uitwerking is het bewijs dat je aanpak verbeterd is.

12 Een fout gericht herstellen

Bij een prijsstijging van 20% en daarna een daling van 20% schrijft een leerling: terug op de oude prijs.

a Leg de fout uit en kies de passende herstelvaardigheid.

b Pas die vaardigheid toe op een nieuw bedrag:€75 stijgt 10% en daalt daarna 10%.

13 Een andere formulefout

Bij $M=3L+8$ wordt voor L de formule $L=\frac{M}{3}-8$ opgeschreven.

a Herstel de formule en benoem de fout.

b Controleer met een nieuwe waarde $M=53$.

14 Wat ging mis?

Een leerling heeft drie fouten: percentages opgeteld, uren als minuten ingevuld en een antwoord niet op hele pakken afgerond.

a Koppel elke fout aan een concrete vervolgstap.

b Maak een nieuwe controle:12% groei en 5% afname op 200;3 liter/min gedurende 0,4 uur;31 meter nodig met rollen van 8 meter.

15 Zelfstandig combineren

Een onderhoudsbedrijf rekent K=36+0,8m euro, met m in tientallen minuten: m=1 betekent 10 minuten.

a Bereken de prijs van een klus van 2 uur.

b Een leerling gebruikt m=120. Benoem de fout en toon met een nieuwe klus van 50 minuten de juiste aanpak.

c Maak m vrij uit de formule en controleer de uitkomst voor een prijs van €44.

16 Een onafhankelijke controle

Een voorraad daalt 18% tot 492 kg.

a Bereken de oorspronkelijke voorraad en controleer.

b Leg uit welke controle zou erop wijzen dat 492×1,18 onjuist is.

12.2 Examencontexten met lineaire en exponentiële modellen

Leerdoel

Ik kan uit een onbekende context een passend lineair, exponentieel of evenredigheidsmodel kiezen en opstellen.

Theorie

Een model kiezen

Kijk eerst naar de betekenis van de grootheden en de omstandigheden. Een vast verschil per gelijke tijdstap past bij een lineair model; een vaste verhouding bij een exponentieel model.

Bij evenredigheid is de verhouding van twee grootheden constant. Bij omgekeerde evenredigheid is juist hun product constant. Controleer of een startbedrag of een andere grens dit eenvoudige verband doorbreekt. Zie voorbeeld 12.2A, blz. 820.

Onthoud: Gebruik de context én de meetgegevens.

1 Kisten opslaan

Een opslagbedrijf vraagt een vast bedrag plus een bedrag per kist. Voor 20 kisten is de prijs €86 en voor 50 kisten €170.

a Bereken eerst de prijsstijging per extra kist en stel daarna een formule op.

b Wat betekenen beide getallen in de formule? Controleer de formule met beide gegevens.

c Een ander bedrijf rekent €10 plus €3,30 per kist. Toon aan wanneer het eerste bedrijf goedkoper is.

2 Een databestand

Een archief groeit van 320 GB naar 500 GB in twee jaar. Men veronderstelt jaarlijks dezelfde procentuele groei.

a Stel een model op met t in jaren na de eerste meting.

b Toon aan dat de verwachte toename in het derde jaar groter is dan in het eerste jaar.

3 Water voor planten

Bij constante toevoer stijgt de inhoud van een vat in 12 minuten van 45 naar 141 liter. Het vat bevat maximaal 325 liter.

a Stel een formule op voor de inhoud V, met t in minuten na het begin van de meting.

b Bereken wanneer het vat vol is en geef het geldigheidsgebied van dit model.

Een grens bepalen

Leerdoel

Ik kan een voorspelling, snijpunt, groeifactor, tijdseenheid of grenswaarde berekenen zonder vooraf gegeven aanpak.

Theorie

Een grens bepalen

Vertaal de vraag naar een vergelijking of ongelijkheid. Kies vervolgens een algebraïsche, grafische of numerieke aanpak. Noteer wat je invoert en wat de oplossing betekent.

Bij hele dagen, personen of artikelen controleer je de twee gehele waarden rond de berekende grens. Rond een tussenuitkomst niet voortijdig af. Zie voorbeeld 12.2A, blz. 820.

Onthoud: Gelijkheid is niet hetzelfde als voor het eerst groter.

4 Twee installaties

Installatie A verwerkt $A=600+90t$ pakketten en installatie B verwerkt $B=500\times1{,}15^t$ pakketten. Hierbij is t het aantal uren na de start; gebruik de modellen alleen voor $0\le t\le12$.

a Maak een tabel voor $t=0$, 2, 4, 6, 8 en 10 en beschrijf welke installatie aanvankelijk voorligt.

b Bereken het snijpunt numeriek en interpreteer de uitkomst.

5 Een grens voor materiaal

Een voorraad van 800 kg neemt dagelijks met 6% af. Er wordt aan het einde van elke dag gemeten.

a Op welke dag is er voor het eerst minder dan 500 kg over?

b Bereken de procentuele afname over een week.

6 Een gewenste groei

Een bezoekersaantal moet in vier jaar van 24 000 naar 35 000 groeien. Men rekent met een constant jaarlijks groeipercentage.

a Bereken het benodigde jaarlijkse groeipercentage.

b Waarom is een stijging van elk jaar 2750 bezoekers een ander model?

7 Een bestelgrens

Bij leverancier A kost een bestelling €18 plus €4,20 per artikel. Bij leverancier B kost elk artikel €4,65 en is er geen vast bedrag.

a Voor welke hele aantallen artikelen is A voordeliger?

b B geeft 8% korting op de volledige bestelling. Bereken de nieuwe grens.

8 Een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid wordt gemodelleerd door $Q=75\times1{,}6^{t}$, met t in jaren.

a Schrijf hetzelfde model met m in maanden.

b Bereken na hoeveel hele maanden de hoeveelheid voor het eerst boven 100 komt.

Parameters en geldigheid

Leerdoel

Ik kan parameters en modeluitkomsten interpreteren en de beperkingen van een voorspelling uitleggen.

Theorie

Parameters en geldigheid

Een modelgetal krijgt betekenis door zijn plaats in de formule en de eenheid van de variabele. Beschrijf de beginwaarde, toename, factor of grens in de context.

Een goede aansluiting op oude gegevens garandeert geen toekomstige uitkomst. Benoem de periode, omstandigheden en beperkingen. Zie voorbeeld 12.2B, blz. 821.

Onthoud: Een voorspelling is voorwaardelijk.

9 Bezoekers voorspellen

Een proefmodel geeft $N=1800\times1{,}08^{t}$, met t in jaren na 2026. Er zijn maximaal 3000 plaatsen beschikbaar.

a Interpreteer 1800 en 1,08 en bereken de voorspelling voor 2030.

b Waarom kan dit model niet onbeperkt worden gebruikt?

10 Een gedeelde rekening

De kosten per deelnemer zijn $K=\frac{720}{n}+12$, met n een positief geheel aantal deelnemers.

a Interpreteer beide onderdelen en beschrijf de grenswaarde bij een steeds grotere groep.

b Hoeveel deelnemers zijn minimaal nodig voor $K\leq€30$?

11 Meetgegevens en model

In een kas worden bij t=0, 1, 2 en 3 uur respectievelijk 100, 119, 143 en 171 eenheden gemeten. Men stelt $N=100\times1{,}2^t$ voor.

a Bereken het grootste absolute verschil tussen model en meting op deze vier tijdstippen.

b Een onderzoeker noemt hiermee de voorspelling voor t=24 bewezen. Beoordeel die uitspraak.

12 Een parameter wijzigen

Een model luidt W=250+60t. Een nieuw apparaat heeft bij t=0 dezelfde waarde, maar na 5 uur is de waarde 50 hoger dan volgens het oude model.

a Stel het nieuwe lineaire model op.

b Toon aan dat de relatieve verhoging na 5 uur geen 20% is.

13 Een buffer

Een buffer bevat aanvankelijk 1200 liter. Na elke werkdag blijft 85% van de hoeveelheid van de vorige dag over. De omstandigheden blijven volgens de beheerder tien dagen gelijk.

a Stel een model op en interpreteer de parameters.

b Bereken de hoeveelheid na zes dagen en noem een beperking van een voorspelling voor dag 100.

Een redenering laten zien

Leerdoel

Ik kan een volledige controleerbare redenering formuleren bij aantonen, verklaren, vergelijken of terugrekenen.

Theorie

Een redenering laten zien

Bij aantonen schrijf je de relevante relatie en de stappen naar de gewenste conclusie op. Bij vergelijken gebruik je dezelfde tijd, eenheid en uitgangssituatie.

Controleer terugrekenen door de gevonden waarde in de oorspronkelijke relatie in te vullen. Een losse rekenmachine-uitkomst maakt je redenering niet controleerbaar. Zie voorbeeld 12.2B, blz. 821.

Onthoud: Verbind berekening, controle en conclusie.

14 Een uitspraak aantonen

Twee abonnementen hebben kosten A=96+2x en B=36+3,5x, met x het aantal gebruikte uren per jaar.

a Toon algebraïsch aan dat A bij 60 uur €30 goedkoper is.

b Geef een tweede controle met afzonderlijke bedragen.

15 Een beginwaarde terugvinden

Een populatie groeit elk jaar met 12%. Na drie jaar zijn er volgens het model 17 561,6 organismen.

a Bereken de beginwaarde en controleer je antwoord.

b Leg uit waarom driemaal 12% van de eindwaarde aftrekken niet werkt.

16 Twee verkeerde redeneringen

Een leerling stelt: “Twee gemeten punten bewijzen exponentiële groei. Een factor 1,44 over twee jaar betekent 22% groei per jaar.”

a Beoordeel beide beweringen en herstel de tweede.

b Noem extra informatie die helpt bij de modelkeuze.

17 Een nieuwe vergoeding

Een opdrachtgever biedt A=150+28h euro. Een alternatief is B=38h euro. Alleen hele gewerkte uren worden vergoed.

a Bereken vanaf hoeveel uren B meer oplevert en onderbouw de grens.

b Door een wijziging wordt het vaste bedrag van A €210. Een leerling zegt dat de grens met 40% stijgt. Onderzoek dat zorgvuldig.

18 Een reserve

Een reserve groeit in vijf jaar van €18 000 naar €24 000, met jaarlijks een gelijk percentage.

a Stel een model op met t in jaren en bereken de waarde na acht jaar.

b Bereken de verdubbelingstijd in jaren.

12.3 Statistiek en onderzoeksredeneringen in examencontexten

Leerdoel

Ik kan data, diagrammen en kengetallen in een onbekende context correct interpreteren en benodigde gegevens selecteren.

Theorie

Gegevens doelgericht lezen

Bepaal wat een waarneming voorstelt, welke variabele is gemeten en wat de vraag vraagt. Lees eenheid, assen, categoriegrenzen en groepsgrootten.

Een samenvatting laat gegevens weg. Een boxplot geeft geen exact gemiddelde en een gegroepeerde tabel geeft niet altijd de afzonderlijke waarden. Zie voorbeeld 12.3A, blz. 822.

Onthoud: Kies alleen gegevens die de vraag ondersteunen.

1 Een verdeling lezen

Een bibliotheek registreert uitleenaantallen bij een willekeurige steekproef van 200 leden. De tabel gebruikt elkaar uitsluitende categorieën.

Aantal boeken	0	1–2	3–4	5 en meer
Aantal leden	20	80	70	30

a Bepaal welke gegevens je nodig hebt voor het aandeel leden dat minstens drie boeken leent en bereken dit aandeel.

b Kun je het exacte gemiddelde aantal uit deze tabel berekenen? Leg uit.

c De bibliotheek wil het aandeel in alle leden schatten. Bereken een benaderend 95%-interval en noem een voorwaarde.

2 Een gemiddelde in een kop

Een artikel meldt: “De doorsnee wachttijd is 18 minuten.” Er zijn 20 wachttijden: bij 15 personen 8 minuten en bij 5 personen 48 minuten.

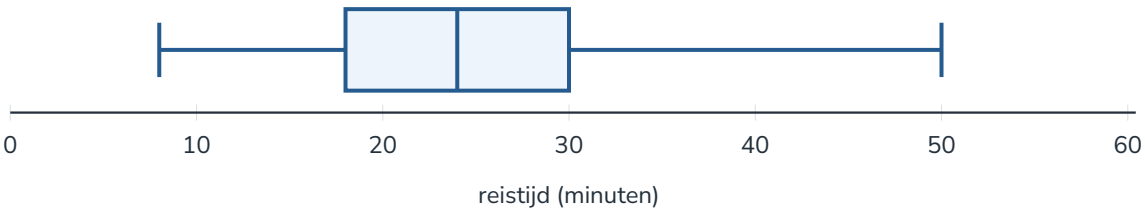
a Bereken gemiddelde en mediaan.

b Beoordeel de formulering doorsnee en geef een nauwkeuriger kop.

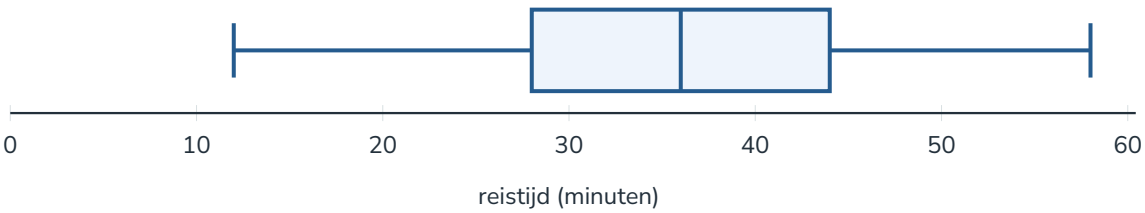
3 Een diagram vergelijken

Twee groepen hebben de hieronder getekende boxplots van hun reistijd in minuten. Gebruik de afgesproken boxplotregels voor het verschil.

Groep A



Groep B



a Lees de mediaan en de kwartielafstand van beide groepen af.

b Classificeer het verschil en onderbouw dit met de boxen en medianen.

Een passende maat kiezen

Leerdoel

Ik kan een passende maat voor verschil of betrouwbaarheid kiezen en de benodigde berekening uitvoeren.

Theorie

Een passende maat kiezen

Kies vanuit vraag en datatype: φ bij een 2×2-tabel, maxVcp bij geordende categorieën en beide groepsgroottes groter dan 100, boxplotregels bij boxplots of effectgrootte bij gemiddelden en standaardafwijkingen.

Voor een aandeel gebruik je $p \pm 2\sqrt{(\frac{p(1-p)}{n})}$; voor een gemiddelde gebruik je $\bar{x} \pm \frac{2S}{\sqrt{n}}$. Beoordeel de steekproefvoorwaarden en de bruikbaarheid van de benadering. Zie voorbeeld 12.3A, blz. 822.

Onthoud: Een verschilmaat en een betrouwbaarheidsinterval beantwoorden andere vragen.

4 Een verschil meten

Een training wordt bij twee onafhankelijke groepen onderzocht. De eerste groep heeft gemiddelde score 64 en standaardafwijking 8; de tweede 58 en standaardafwijking 12.

a Kies een passende maat voor het verschil op basis van deze gegevens en bereken die.

b Waarom volgt hieruit nog geen bewezen effect van de training?

5 Twee antwoorden

Onder 200 treinreizigers steunen 140 een voorstel; onder 200 busreizigers steunen 100 het voorstel.

a Maak de 2×2-tabel en bereken φ voor vervoermiddel en steun.

b Vergelijk dit met het verschil in steunpercentages.

6 Een onzeker gemiddelde

Bij 144 willekeurig geselecteerde metingen is de gemiddelde duur 32 minuten en de steekproefstandaardafwijking 9 minuten. De waarnemingen zijn voldoende onafhankelijk.

a Bereken een benaderend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.

b Hoe groot moet n bij dezelfde standaardafwijking minimaal zijn om de marge hoogstens 1 minuut te maken?

7 Geordende categorieën

Twee onafhankelijke groepen van elk 150 personen beoordelen een dienst als slecht, matig, goed of uitstekend. Hun cumulatieve percentages staan in de tabel.

Tot en met	Slecht	Matig	Goed	Uitstekend
Groep A (%)	12	28	70	100
Groep B (%)	20	52	88	100

a Bereken maxVcp en classificeer het verschil.

b Welke groep beoordeelt de dienst over het algemeen hoger? Licht toe.

Een begrensde conclusie

Leerdoel

Ik kan een statistische conclusie onderbouwen met de berekening en daarbij representativiteit, onzekerheid en causaliteit begrenzen.

Theorie

Een begrensde conclusie

Noem de onderzochte groep, de berekende uitkomst en de onzekerheid. Generaliseren vraagt een verdedigbare steekproef en aandacht voor non-respons.

Een normale vuistregel beschrijft een benaderend aandeel. Een interval voor een parameter beschrijft geen spreiding van individuele waarnemingen. Zie voorbeeld 12.3B, blz. 823.

Onthoud: De conclusie mag niet verder gaan dan de gegevens.

8 Een peiling via een website

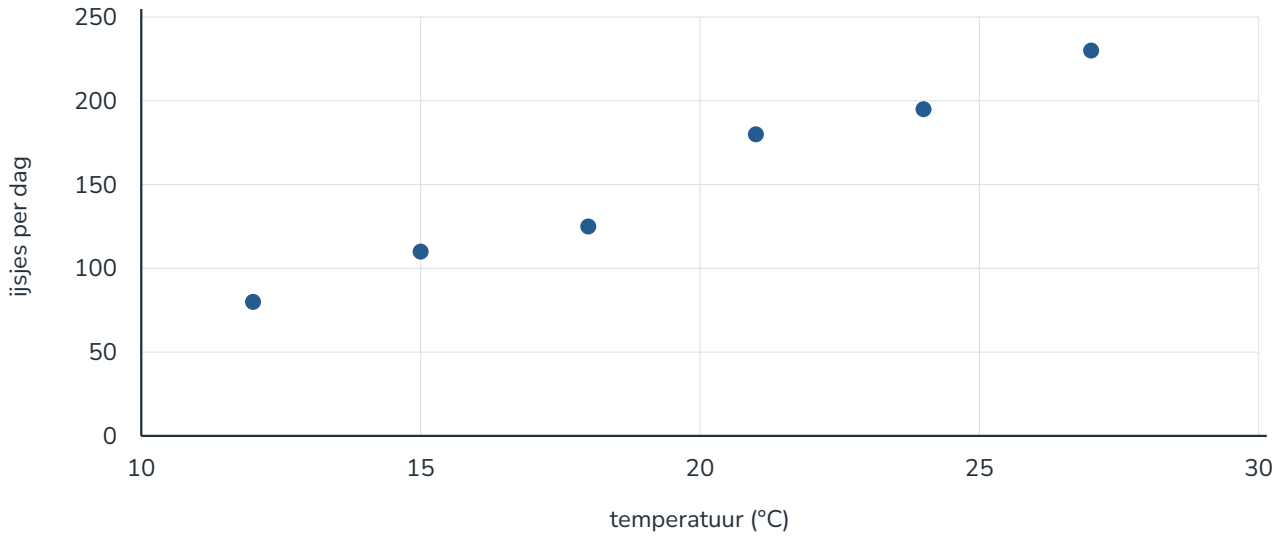
Op een gemeentelijke website stemmen 800 bezoekers; 72% is voor een nieuw park. Iedereen die de website bezoekt kan vrijwillig meedoen.

a Is een nauw berekend interval voldoende om de mening van alle inwoners te schatten? Verklaar.

b Stel één verbetering voor en noem een probleem dat daarna nog aandacht vraagt.

9 Een verband in een puntenwolk

De puntenwolk toont zes waarnemingen van buitentemperatuur en ijsverkoop op verschillende dagen.



a Beschrijf richting, vorm en sterkte van het zichtbare verband.

b Kun je hiermee bewijzen dat elk extra verkocht ijsje de temperatuur doet stijgen?

10 Een interval voor steun

In een aselecte steekproef van 625 inwoners steunen 375 een maatregel. De respons is hoog en er zijn geen aanwijzingen voor selectieve uitval.

a Bereken het benaderende 95%-interval voor het aandeel voorstanders.

b Onderbouw of deze gegevens steun geven aan de uitspraak dat een meerderheid voor is.

11 Verpakkingen

De inhoud van verpakkingen is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 500 gram en standaardafwijking 4 gram. De machine wordt geregeld opnieuw gecontroleerd.

a Schat met de normale vuistregels welk percentage tussen 492 en 508 gram ligt.

b Schat welk percentage minder dan 492 gram bevat en beoordeel de uitspraak dat dus precies 25 van elke 1000 verpakkingen te licht zijn.

Een claim beoordelen

Leerdoel

Ik kan kritische onderzoeksclaims beoordelen en de beperking of fout precies uitleggen.

Theorie

Een claim beoordelen

Controleer of de kop dezelfde grootheid en populatie noemt als het onderzoek. Maak onderscheid tussen samenhang, groepsverschil en oorzaak.

Let bij grenswaarden op de afgesproken ongelijkheden. Rond een maat niet af voordat je de categorie kiest. Zie voorbeeld 12.3B, blz. 823.

Onthoud: Benoem precies welke stap in de redenering niet volgt.

12 Een overtuigende kop?

Een onderzoek vergelijkt sporters met niet-sporters. Sporters slapen gemiddeld langer. De deelnemers kozen zelf of zij sportten.

a Beoordeel de kop “Sporten zorgt voor meer slaap”.

b Schrijf een beter onderbouwde conclusie.

13 Een kleine groep wegpoetsen

Een peiling onder 80 personen geeft 55% steun. Een redacteur wil dezelfde uitkomst publiceren als 550 voorstanders op 1000, omdat het percentage gelijk blijft.

a Leg uit waarom dit de onzekerheid verkeerd weergeeft.

b Bereken de juiste benaderende marge en de ten onrechte gebruikte marge.

14 Grenzen verkeerd lezen

Een leerling schrijft: “Bij E=0,8 is het verschil groot. Een 95%-interval voor het gemiddelde bevat 95% van de personen.”

a Herstel beide fouten.

b Wat betekent de 95% bij de gebruikte intervalprocedure?

15 Een serviceonderzoek

Een aselecte steekproef van 400 klanten heeft een gemiddelde beoordeling van 7,2 en standaardafwijking 1,4. Een advertentie claimt: “95% van onze klanten geeft tussen 7,06 en 7,34.”

a Bereken een passend 95%-interval voor het populatiegemiddelde.

b Beoordeel de advertentie en geef een juiste formulering.

16 Een grensgeval

Twee groepen hebben gemiddelden 72 en 68 en standaardafwijkingen 8 en 12.

a Bereken de effectgrootte en classificeer het verschil.

b Leg uit waarom deze classificatie niets zegt over de oorzaak van het verschil.

12.4 Gemengde examenclusters en zelfstandig controleren

Leerdoel

Ik kan bij een gemengde onbekende context zelfstandig relevante gegevens en een passende wiskundige aanpak kiezen.

Theorie

Eerst zelf kiezen

Lees de volledige context en noteer de gezochte grootheid, relevante gegevens en voorwaarden. Kies zelf een aanpak en werk zonder de voorbeelden of antwoorden ernaast.

Plan per cluster tijd voor rekenen en een slotcontrole. Markeer een vraag die vastloopt en kom er later op terug. Zie voorbeeld 12.4A, blz. 824.

Onthoud: Een onderwerpnaam mag je keuze niet overnemen.

1 Een buurtwerkplaats

Een werkplaats rekent €15 per bezoek of een abonnement van €96 per jaar plus €7 per bezoek. Er zijn 280 leden; 168 kiezen een abonnement.

a Vanaf hoeveel bezoeken per jaar is het abonnement goedkoper?

b Bereken het percentage leden met een abonnement.

c Beoordeel dit antwoordfragment: “De grens is 12, dus vanaf 12 bezoeken goedkoper.” Benoem het leerdoel dat herstel vraagt.

d Maak zonder het vorige antwoord een nieuwe controle: €70 vast plus €5 per bezoek tegenover €12 per bezoek. Onderbouw de grens.

2 Een waterpunt

Een waterpunt kost €2400 voor aanleg en €0,04 per getapte liter. Een vereniging telt 80 leden. De verwachte afname is 15 liter per lid per maand.

a Bereken de totale kosten over het eerste jaar.

b Bereken de gemiddelde kosten per liter in dat jaar.

c Een leerling rekent €0,04 als gemiddelde. Welke grootheid ontbreekt?

d Bij een tweede locatie kost aanleg €1800 en is de jaarafname 9000 liter. Bereken daar de gemiddelde kosten per liter.

3 Een reparatiepool

Een reparatiepool heeft 400 gebruikers en verwacht elk jaar 18% groei. Per gebruiker zijn gemiddeld 1,4 reparaties per jaar nodig. De capaciteit is 900 reparaties per jaar.

a Bereken de verwachte vraag naar reparaties na drie jaar.

b In welk heel jaar is de capaciteit voor het eerst onvoldoende?

c Leg uit welke twee aannamen nodig zijn voor deze conclusie.

d De gemiddelde vraag daalt vanaf het begin jaarlijks met 5%. Bereken de nieuwe jaarlijkse factor van de totale vraag.

Een samenhangend antwoord

Leerdoel

Ik kan een samenhangend examencluster uitwerken met correcte berekeningen, zichtbare tussenstappen en contextgebonden conclusies.

Theorie

Een samenhangend antwoord

Gebruik eerder gevonden waarden, maar behoud genoeg nauwkeurigheid. Maak duidelijk welk getal bij welke vraag hoort en waarom je berekening de vraag beantwoordt.

Een conclusie bevat de eenheid, een passende afronding en de betekenis in de context. Zie voorbeeld 12.4A, blz. 824.

Onthoud: Laat je redenering ook bij numeriek oplossen zien.

4 Een buurtpeiling

Van 500 aselect uitgenodigde inwoners reageren 400. Van de respondenten steunen 248 een buurtproject. De respons wordt voorlopig als representatief beschouwd.

a Bereken het steunpercentage onder respondenten en de non-respons.

b Bereken een benaderend 95%-interval voor het aandeel voorstanders.

c Onderzoek of steun onder de niet-respondenten invloed kan hebben op de conclusie.

d Formuleer een zorgvuldige eindconclusie.

Nakijken met bewijs

Leerdoel

Ik kan de eigen uitwerking met een beoordelingsmodel controleren en fouten aan concrete leerdoelen koppelen.

Theorie

Nakijken met bewijs

Open het antwoordmodel pas na een eigen poging. Vergelijk per stap en noteer begrip, aanpak, algebra, eenheid, afronding of conclusie als foutsoort.

Koppel de fout aan het kleinste passende leerdoel. Een totaalscore alleen vertelt nog niet wat je moet oefenen. Zie voorbeeld 12.4B, blz. 825.

Onthoud: Noteer de ontbrekende stap, niet alleen het goede antwoord.

5 Een nakijkgesprek

Een leerling werkt aan $A=120\times1{,}08^t$. Na vier jaar noteert hij 158,4. Zijn redenering is: “Vier keer 8% erbij is 32% erbij.”

a Bereken de juiste waarde na vier jaar.

b Gebruik dit beoordelingsmodel: juiste groeirelatie 1 punt; juiste berekening 1 punt; afronding met interpretatie 1 punt. Hoeveel punten verdient het fragment? Motiveer.

c Koppel de fout aan een concreet leerdoel en kies een herstelactie.

d Controleer met nieuwe gegevens: beginwaarde 250 en 6% groei gedurende drie jaar.

6 Een interval nakijken

Bij n=225, gemiddelde 48 en S=12 schrijft een leerling het interval $48 \pm \frac{12}{225}$.

a Bereken het juiste benaderende 95%-interval.

b Benoem beide formulefouten en het passende leerdoel.

c Wat controleer je naast de formule voordat je een populatieconclusie trekt?

d Maak een nieuwe controle met n=100, gemiddelde 31 en S=5.

7 Een uitleendienst

Een uitleendienst heeft 600 gebruikers. Het aantal groeit volgens een model met 12% per jaar. In een aselecte steekproef van 240 huidige gebruikers zijn 156 tevreden.

a Bereken na hoeveel hele jaren het aantal voor het eerst boven 1000 ligt.

b Bereken een benaderend 95%-interval voor het huidige tevredenheidsaandeel.

c Een leerling gebruikt bij de intervalberekening n=600. Leg de fout uit en koppel die aan een leerdoel.

d Noteer na je eigen poging per deelvraag welke stap je goed had en welke stap ontbreekt. Gebruik de uitwerkingen pas daarna.

Herstel controleren

Leerdoel

Ik kan na gerichte herhaling een nieuwe vraag zelfstandig oplossen en het herstel onderbouwen.

Theorie

Herstel controleren

Herhaal het passende onderdeel en maak daarna een nieuwe vraag zonder hulp. Leg naast je nieuwe uitwerking de oorspronkelijke fout en wijs de herstelde stap aan.

Maak de twee losse oefenexamens op verschillende momenten. Gebruik na het eerste examen de doelmatrix om de tussenliggende oefening te kiezen. Zie voorbeeld 12.4B, blz. 825.

Onthoud: Toon herstel met een nieuwe zelfstandige uitwerking.

8 Een nieuwe poging

Een leerling had bij een vorige taak 25% korting teruggedraaid door de nieuwe prijs met 1,25 te vermenigvuldigen. Hij oefende daarna het kiezen van de procentbasis.

a Een gereedschap kost na 20% korting €184. Bereken de oorspronkelijke prijs.

b Controleer de terugrekening met de oorspronkelijke korting.

c Leg uit welke stap laat zien dat de oude fout is hersteld.

d Een tweede product gaat eerst 10% omhoog en daarna 20% omlaag en kost dan €132. Bereken de eerste prijs.

9 Een statistische herkansing

Een eerdere conclusie verwarde een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde met een interval voor individuele waarden. Een nieuwe steekproef heeft n=64, gemiddelde 22 en S=4; de normale benadering is hier bruikbaar.

a Bereken het benaderende 95%-interval voor het populatiegemiddelde.

b Schrijf één correcte en één onjuiste interpretatie en verklaar het verschil.

c De populatie is ongeveer normaal met gemiddelde 22 en standaardafwijking 4. Geef nu een interval met ongeveer 95% van de individuele waarden.

d Leg uit waarom dit tweede interval veel breder is.

10 Een koelruimte

Een koelruimte kost €360 vaste kosten per maand en €0,18 per opgeslagen kratdag. Men wil de gemiddelde kosten onder €0,30 per kratdag krijgen.

a Bereken vanaf hoeveel hele kratdagen per maand dit lukt.

b Een leerling antwoordde 3000. Benoem de fout en geef een berekening die deze aantoont.

c Maak een nieuwe controle: €450 vast plus €0,15 per kratdag, met gemiddelde kosten onder €0,25.

d Onderbouw met twee grenswaarden dat het herstel klopt.

Gemengd oefenen

1 Een renovatie

Een renovatie kost €18 000 exclusief 21% btw. Een subsidie vergoedt 30% van de prijs exclusief btw.

a Bereken wat de eigenaar uiteindelijk zelf betaalt.

b Een leerling rekent 18000×0,70×1,21. Verklaar het verschil.

2 Een capaciteit plannen

Een vereniging heeft 750 leden en verwacht 9% jaarlijkse groei. De zaal kan 1100 leden ontvangen.

a Bereken wanneer de verwachte ledentalgrens bij een jaarlijkse controle voor het eerst wordt overschreden.

b Bereken welke maximale constante groeifactor vijf jaar lang onder of op de grens blijft.

c Noem een modelbeperking.

3 Een serviceverschil

Twee filialen hebben gemiddelde wachttijden 14 en 18 minuten en standaardafwijkingen 5 en 5 minuten. De gegevens zijn op vergelijkbare willekeurige tijdstippen verzameld.

a Bereken een passende verschilmaat en classificeer.

b Een manager schrijft het verschil uitsluitend toe aan personeelstraining. Wat ontbreekt aan de onderbouwing?

4 Van diagnose naar herstel

Een leerling berekent bij 15% groei gevolgd door 10% afname een netto groei van 5%.

a Herstel de berekening voor een beginwaarde van 800.

b Koppel de fout aan een doel en geef een nieuwe zelfstandige controle bij 12% groei gevolgd door 8% afname op 250.

Aanvullende SE-route

Maak deze vier onderdelen alleen wanneer het school-PTA dit vraagt. Ze horen niet bij de twee CE-oefenexamens.

5 SE · Een activiteitenmiddag

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. Een school heeft 6 workshops. Voor een programma worden drie verschillende workshops gekozen.

a Bereken het aantal keuzes als de volgorde niet telt.

b Bereken het aantal programma's als de drie tijdvakken verschillende plaatsen vormen.

c Twee workshops mogen niet samen gekozen worden. Bereken hoeveel ongeordende keuzes van drie overblijven.

d Een leerling mag óf één workshop uit 6 óf één lezing uit 4 kiezen. Leg uit waarom je optelt.

e Een toegangscode heeft drie cijfers uit 0 tot en met 9; herhaling is toegestaan en 0 mag vooraan. Geef een systematische telredenering.

f Hoeveel van deze codes bevatten minstens één 7? Gebruik het complement en controleer wat je aftrekt.

6 SE · Gemiddelde verandering

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. De afgelegde afstand is $s(t)=2t^2+3t$ meter, met t in seconden en $0\le t\le 10$.

a Bereken de gemiddelde snelheid tussen $t=2$ en $t=5$.

b Bereken de gemiddelde snelheid tussen $t=5$ en $t=8$ en vergelijk.

c Leg uit welke lijnhelling de eerste berekening voorstelt en waarom dit geen snelheid op één moment is.

7 SE · Lokaal gedrag

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. Een model voor hoogte is $h(t)=-t^2+8t+2$ meter, met $0\le t\le 8$.

a Schat de lokale veranderingssnelheid bij $t=2$ met de symmetrische intervalhelling van 1,9 tot 2,1.

b Schat op dezelfde manier bij $t=4$ en $t=6$ en interpreteer het teken.

c Bepaal het maximum op het gegeven domein en onderbouw het met stijgen en dalen.

d Leg uit waarom een lokaal horizontale grafiek alleen niet genoeg is om een maximum aan te tonen.

8 SE · Een klein digitaal onderzoek

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. De tabel bevat samengestelde reistijden. Voer de verwerking uit in een spreadsheet en lever het bewerkbare bestand mee in.

Groep	Reistijd (minuten)
A	12
A	15
A	18
A	21
A	24
A	30
B	15
B	18
B	21
B	24
B	27
B	33

a Formuleer een onderzoeksvraag over het verschil tussen de twee groepen.

8 SE · Een klein digitaal onderzoek (vervolg)

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. De tabel bevat samengestelde reistijden. Voer de verwerking uit in een spreadsheet en lever het bewerkbare bestand mee in.

Groep	Reistijd (minuten)
A	12
A	15
A	18
A	21
A	24
A	30
B	15
B	18
B	21
B	24
B	27
B	33

b Benoem datatype en eenheid en maak een gegevensblad met één meting per rij.

c Beschrijf een controle op foutieve invoer en ontbrekende waarden.

d Sla ruwe gegevens en verwerking apart op en noteer wat een ander nodig heeft om je werk te herhalen.

e Maak een frequentietabel van beide groepen.

f Bereken per groep gemiddelde en steekproefstandaardafwijking met spreadsheetformules.

g Maak twee vergelijkbare boxplots met dezelfde tijdas.

h Voer één onafhankelijke handcontrole uit op je digitale verwerking.

i Kies een passende vergelijking en voer deze uit.

8 SE · Een klein digitaal onderzoek (vervolg)

Dit onderdeel is alleen bedoeld voor het schoolexamen wanneer het PTA dat vraagt. De tabel bevat samengestelde reistijden. Voer de verwerking uit in een spreadsheet en lever het bewerkbare bestand mee in.

Groep	Reistijd (minuten)
A	12
A	15
A	18
A	21
A	24
A	30
B	15
B	18
B	21
B	24
B	27
B	33

j Schrijf een conclusie die alleen over deze gegevens gaat.

k Maak een kort rapport met vraag, gegevens, verwerking, figuur en conclusie.

l Beoordeel de grenzen van je onderzoek en stel één vervolgonderzoek voor.

Gericht verder oefenen

9 **Herstel · Eenheden**

Een machine levert 18 onderdelen per minuut.

a Bereken de productie in 2,25 uur en noteer de eenheden.

b Waarom is 18×2,25 niet de gevraagde productie?

10 **Herstel · Groeimodel**

Een hoeveelheid groeit in drie jaar van 200 naar 266,2.

a Bereken de jaarlijkse groeifactor.

b Controleer de beginwaarde door terug te rekenen.

11 **Herstel · Onzekerheid**

Een aselecte steekproef van 100 personen heeft gemiddelde 36 en S=8.

a Bereken het benaderende 95%-interval voor het gemiddelde.

b Leg uit waarom dit niet het interval voor 95% van de individuele waarden is.

12 **Herstel · Een antwoord afronden**

Een reserve van 300 eenheden neemt elke dag met 8% af. De grens is 200 eenheden.

a Bepaal de eerste hele dag waarop de reserve onder 200 ligt.

b Schrijf een controlezin die laat zien waarom dag 4 niet voldoet.

Nieuwe controle

13 Nieuwe controle · Basis

Een product kost na 12% korting €242.

a Bereken en controleer de oorspronkelijke prijs.

b Maak in K=75+2,5x de variabele x vrij en bereken x bij K=200.

14 Nieuwe controle · Modellen

Een voorraad groeit van 450 naar 720 in vier jaar met een constant percentage.

a Stel een model op en bereken na hoeveel hele jaren de voorraad voor het eerst boven 1000 komt.

b Leg uit waarom deze voorspelling niet zeker is.

15 Nieuwe controle · Onderzoek

Van 625 aselect geselecteerde respondenten steunen 350 een plan. Er zijn geen aanwijzingen voor selectieve respons.

a Bereken een benaderend 95%-interval en beoordeel de steun voor een meerderheid.

b Welke eerdere fout zou je met deze vraag kunnen controleren? Noem een concreet bewijs van herstel in je uitwerking.

Twee volledige oefenexamens

Maak HELDER-EX-01 en HELDER-EX-02 afzonderlijk, elk in 180 minuten. Gebruik alleen de hulpmiddelen die je docent voor een examensimulatie toestaat. Elk examen bevat 23 vragen, een eigen formuleblad en een afzonderlijk beoordelingsmodel. Dit zijn oorspronkelijke oefenexamens; er is geen officiële normering.

Eindevaluatie

Kijk na je eerste poging na met het beoordelingsmodel. Registreer per vraag score, ontbrekende stap en leerdoel. Kies vervolgens gericht herstel uit 12.1 tot en met 12.4.

Maak het tweede examen pas na die herstelronde. Vergelijk per vaardigheid je nieuwe uitwerking met de eerder vastgestelde fout. De antwoorden en voorbeeldroutes blijven tijdens de poging gesloten.

Leerdoelenoverzicht

12.1 · Leerdoel 1: Ik kan percentages, verhoudingen, eenheden en afrondingen correct toepassen in een onbekende context.

12.1 · Leerdoel 2: Ik kan een passende formule gebruiken, omwerken of combineren en tussenstappen zichtbaar noteren.

12.1 · Leerdoel 3: Ik kan een uitkomst controleren met eenheden, orde van grootte en terugsubstitutie.

12.1 · Leerdoel 4: Ik kan op basis van een foutenanalyse een passende herstelroute kiezen en aantonen dat de fout bij een nieuwe vraag is hersteld.

12.2 · Leerdoel 1: Ik kan uit een onbekende context een passend lineair, exponentieel of evenredigheidsmodel kiezen en opstellen.

12.2 · Leerdoel 2: Ik kan een voorspelling, snijpunt, groeifactor, tijdseenheid of grenswaarde berekenen zonder vooraf gegeven aanpak.

12.2 · Leerdoel 3: Ik kan parameters en modeluitkomsten interpreteren en de beperkingen van een voorspelling uitleggen.

12.2 · Leerdoel 4: Ik kan een volledige controleerbare redenering formuleren bij aantonen, verklaren, vergelijken of terugrekenen.

12.3 · Leerdoel 1: Ik kan data, diagrammen en kengetallen in een onbekende context correct interpreteren en benodigde gegevens selecteren.

12.3 · Leerdoel 2: Ik kan een passende maat voor verschil of betrouwbaarheid kiezen en de benodigde berekening uitvoeren.

12.3 · Leerdoel 3: Ik kan een statistische conclusie onderbouwen met de berekening en daarbij representativiteit, onzekerheid en causaliteit begrenzen.

12.3 · Leerdoel 4: Ik kan kritische onderzoeksclaims beoordelen en de beperking of fout precies uitleggen.

12.4 · Leerdoel 1: Ik kan bij een gemengde onbekende context zelfstandig relevante gegevens en een passende wiskundige aanpak kiezen.

12.4 · Leerdoel 2: Ik kan een samenhangend examencluster uitwerken met correcte berekeningen, zichtbare tussenstappen en contextgebonden conclusies.

12.4 · Leerdoel 3: Ik kan de eigen uitwerking met een beoordelingsmodel controleren en fouten aan concrete leerdoelen koppelen.

12.4 · Leerdoel 4: Ik kan na gerichte herhaling een nieuwe vraag zelfstandig oplossen en het herstel onderbouwen.

Eindevaluatie

Kijk je werk na met de uitwerkingen. Noteer per leerdoel een opgave die goed ging en een opgave die nog oefening vraagt.

Werk het passende onderdeel opnieuw door. Maak daarna een nieuwe controleopgave zonder je eerdere uitwerking erbij. Controleer of je aanpak nu klopt.

Eindevaluatie

Kijk na met de uitwerkingen. Kies bij een fout de bijbehorende opgaven onder Oefen opnieuw. Maak daarna de opgaven onder Controleer zonder hulp.

Toetsvraag	Leerdoel	Oefen opnieuw	Controleer
12.1 opgave 15a-c en 16a-b (zelfcontrole)	Basisvaardigheden en formulecontrole	Gericht verder oefenen opgave 9; 12.1 opgave 12a-b en 13a-b	Nieuwe controle opgave 13a-b; 12.1 opgave 14b
12.2 opgave 17a-b en 18a-b (zelfcontrole)	Groeimodel, grens en onderbouwing	Gericht verder oefenen opgave 10 en 12	Nieuwe controle opgave 14a-b
12.3 opgave 15a-b en 16a-b (zelfcontrole)	Statistische maat en houdbare conclusie	Gericht verder oefenen opgave 11; 12.3 opgave 4, 8 en 12	Nieuwe controle opgave 15a-b; 10.3 opgave 16a-b
12.4 opgave 7a-d (zelfcontrole)	Nakijken, doel kiezen en herstel aantonen	12.4 opgave 5a-d en 6a-d	12.4 opgave 8a-d en 9a-d

Voorbeeld 12.1A

Een percentage terug

Een bedrag is na 12% stijging €448.

a Bereken het oude bedrag.

1. Wat zoek ik?

Het bedrag vóór de stijging.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik deel door de factor 1,12.

3. Berekening

$\frac{448}{1{,}12}=400$.

4. Antwoord in context

Het oude bedrag is €400.

5. Controle

$400\times1{,}12=448$; de gegeven waarde komt terug.

Voorbeeld 12.1B

Een eenheid herstellen

Een pomp levert 4 liter/minuut en draait 1,25 uur.

a Bereken het volume.

1. Wat zoek ik?

Het aantal liters na de opgegeven duur.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik maak de tijdseenheid gelijk aan die van het debiet.

3. Berekening

$1{,}25 \times 60 = 75$ minuten; $4 \times 75 = 300$.

4. Antwoord in context

Er wordt 300 liter gepompt.

5. Controle

Een uur levert 240 liter; een kwartier 60 liter; samen 300.

Voorbeeld 12.2A

Opslagcapaciteit

Een archief heeft nu 500 GB en groeit per jaar 20%. Er is 900 GB beschikbaar.

a Wanneer is de capaciteit bij jaarlijkse controle voor het eerst onvoldoende?

1. Wat zoek ik?

Het eerste hele jaar met meer dan 900 GB.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik vergelijk opeenvolgende hele jaren rond de grens.

3. Berekening

$500\times1{,}2^3=864$; $500\times1{,}2^4=1036{,}8$.

4. Antwoord in context

Bij de vierde jaarlijkse controle is de capaciteit voor het eerst onvoldoende.

5. Controle

Na drie jaar past het nog; na vier jaar niet.

Voorbeeld 12.2B

Een doel terugrekenen

Een reserve van €5000 moet door een vaste jaarlijkse groeifactor in zes jaar €7000 worden.

a Bereken de benodigde jaarfactor en vergelijk met €350 vaste groei per jaar.

1. Wat zoek ik?

De factor die in zes jaar tot €7000 leidt.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik los $5000 \times g^6 = 7000$ op en vergelijk beide eindbedragen.

3. Berekening

$g = 1{,}4\text{^}(\frac{1}{6}) \approx 1{,}05768$. Vaste groei: $5000 + 6 \times 350 = 7100$.

4. Antwoord in context

Circa 5,77% jaarlijkse groei bereikt het doel; de vaste groei komt €100 hoger uit.

5. Controle

$5000 \times (1{,}4\text{^}(\frac{1}{6}))^6 = 7000$. De modellen hebben verschillende tussenwaarden.

Voorbeeld 12.3A

Een schatting met onzekerheid

In een aselecte steekproef van 900 bewoners gebruikt 45% regelmatig een wandelroute. De respons is voldoende representatief.

a Bereken een benaderend 95%-interval.

1. Wat zoek ik?

Een interval voor het aandeel in de populatie.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de formule voor een aandeel; p=0,45 en n=900.

3. Berekening

Marge$=2\sqrt{(0{,}45\times\frac{0{,}55}{900})}\approx 0{,}03317$. Grenzen: 0,41683 en 0,48317.

4. Antwoord in context

Ongeveer 41,7% tot 48,3% van de bewoners.

5. Controle

De marge is 3,3 procentpunt, niet 3,3% van 45%. Het interval blijft binnen 0% en 100%.

Voorbeeld 12.3B

Verschil en oorzaak

Twee vrijwillig gevormde groepen hebben gemiddelden 30 en 24 en standaardafwijkingen 6 en 9.

a Classificeer het verschil en beoordeel of deelname het verschil veroorzaakt.

1. Wat zoek ik?

De grootte van het verschil en de grens aan een conclusie.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Met gemiddelden en standaardafwijkingen gebruik ik E; voor een oorzaak beoordeel ik de opzet.

3. Berekening

$E=\frac{6}{(\frac{(6+9)}{2})}=0{,}8$.

4. Antwoord in context

Het verschil is middelmatig. Vrijwillige groepsvorming bewijst geen oorzakelijk effect.

5. Controle

0,8 is de bovengrens van middelmatig. Andere groepskenmerken kunnen de uitkomst verklaren.

Voorbeeld 12.4A

Een eigen poging beoordelen

Een aanbieding kost €84 plus €6 per beurt; los betalen kost €13 per beurt. Een leerling schrijft: "$\frac{84}{7}$=12, dus bij 12 beurten goedkoper."

a Beoordeel en verbeter de conclusie.

1. Wat zoek ik?

De eerste gehele waarde waarbij de aanbieding goedkoper is.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik gebruik de vergelijking en controleer de grens.

3. Berekening

$84+6n<13n$ geeft $n>12$. Bij 12 beurten zijn beide €156; bij 13 beurten zijn de bedragen €162 en €169.

4. Antwoord in context

Vanaf 13 beurten is de aanbieding goedkoper.

5. Controle

De leerling had de gelijkheidsgrens goed, maar niet de betekenis van goedkoper.

Voorbeeld 12.4B

Twee geldige routes

Een waarde groeit van 400 naar 576 in twee jaar met een constant percentage.

a Bereken de waarde na nog één jaar op twee manieren.

1. Wat zoek ik?

De waarde na drie jaar.

2. Welke basis en aanpak kies ik, en waarom?

Ik bepaal eerst de jaarfactor; ik kan ook rechtstreeks een macht gebruiken.

3. Berekening

Route 1: $g=\sqrt{(\frac{576}{400})}=1{,}2$; $576\times1{,}2=691{,}2$. Route 2: $400\times(\frac{576}{400})^{(\frac{3}{2})}=691{,}2$.

4. Antwoord in context

De waarde na drie jaar is 691,2.

5. Controle

Beide routes gebruiken dezelfde ongeronde tweejaarsfactor en geven dezelfde uitkomst.

Oefenexamens

Maak ieder examen zelfstandig. De formulebladen staan bij het examen; de beoordelingsmodellen vind je achterin.

Oefenexamen 1 met formuleblad 827

Oefenexamen 2 met formuleblad 835

Na je examen

Kijk je antwoorden na met het beoordelingsmodel. Noteer per vraag welke stap goed ging en wat je nog wilt oefenen. Gebruik daarna de gerichte training van hoofdstuk 12.

HELDER · EX-01

Wiskunde A · havo 5

Oefenexamen

23 vragen · 180 minuten · maximaal 76 punten

Dit is een oorspronkelijk oefenexamen bij HELDER. De contextgegevens zijn voor dit examen samengesteld.

Werk zelfstandig en laat berekeningen en redeneringen zien. Een los antwoord zonder gevraagde onderbouwing levert niet alle punten op.

Rond tussenuitkomsten niet voortijdig af. Gebruik de afronding die in de vraag staat of die de context vraagt.

Gebruik een schrift en een rekenmachine die je docent voor een examensimulatie toestaat. Het formuleblad staat achter de vragen. De voorbeelden en het beoordelingsmodel blijven tijdens de poging gesloten.

Een energiecoöperatie

Een coöperatie koopt een installatie voor €84 000 exclusief 21% btw. Er is een subsidie van 25% van de prijs exclusief btw. Voor deze opgave wordt geen btw teruggevraagd. De leden delen het resterende bedrag gelijk. De installatie levert in het eerste jaar 32 000 kWh.

1 Investering (3 punten)

a Bereken hoeveel 60 leden ieder betalen na aftrek van de subsidie.

2 Opbrengst (3 punten)

a In het eerste jaar vervangt 72% van de productie ingekochte stroom van €0,29 per kWh. De rest wordt verkocht voor €0,08 per kWh. Onderhoud kost €950. Bereken de netto financiële jaaropbrengst.

3 Productie in latere jaren (3 punten)

a De productie daalt na het eerste jaar jaarlijks met 0,6%. Stel een formule op voor P(t), met t=0 in het eerste jaar, en bereken de productie bij t=12, afgerond op hele kWh.

4 Een onderhoudsgrens (3 punten)

a De coöperatie wil groot onderhoud plannen in het eerste hele jaar t waarin de productie onder 29 000 kWh komt. Bereken dit jaar en onderbouw de afronding.

5 Een claim controleren (4 punten)

a Een lid zegt: “De investering is zeker binnen 13 jaar terugverdiend, want 13 maal de opbrengst uit het eerste jaar is meer dan de investering.” Beoordeel deze redenering. Geef een berekening en twee relevante beperkingen.

Een bibliotheek onderzoekt gebruik

Een bibliotheek trekt aselect 600 volwassen leden. Van hen reageren 480. Onder de respondenten gebruiken 288 de studieruimte. Voor vragen 6 en 7 mag de respons als representatief worden beschouwd.

6 **Steekproef en respons** 4 punten

a Bereken het responspercentage en een benaderend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aandeel volwassen leden dat de studieruimte gebruikt.

7 **Een nauwkeuriger peiling** 3 punten

a De bibliotheek wil de marge halveren, bij hetzelfde geschatte aandeel. Bereken hoeveel respondenten dan nodig zijn. Bereken daarna hoeveel leden men bij een verwachte respons van 80% moet uitnodigen om dit aantal respondenten naar verwachting te bereiken.

8 **Non respons** 3 punten

a Laat de representativiteitsaanname nu los. Onderzoek welk percentage van alle 600 uitgenodigde leden de studieruimte gebruikt als geen van de niet-respondenten dit doet, en als zij dit allemaal doen. Leg uit wat dit zegt over een meerderheidsclaim.

9 **Twee vestigingen** 3 punten

a In een ander onderzoek zijn bezoektijden in minuten geregistreerd. Vestiging A heeft gemiddelde 54 en S = 18; vestiging B gemiddelde 42 en S = 12. Bereken een passende verschilmaat en classificeer het verschil.

10 **Een onderzoeksconclusie** 3 punten

a Vestiging A heeft meer stille werkplekken. De directie concludeert dat stille werkplekken de langere bezoektijd veroorzaken. De vestigingen hebben ook een andere klantenmix. Beoordeel de conclusie en geef een onderzoeksverbetering die meer zegt over een oorzaak.

Een regionale bezorgdienst

Een dienst vergelijkt twee maandcontracten. Contract A kost € 420 plus € 1,80 per pakket. Contract B kost € 150 plus € 2,40 per pakket. Het aantal pakketten n is een positief geheel getal.

11 **Contractkeuze** 3 punten

a Bereken voor welke aantallen pakketten contract A goedkoper is. Geef een controle met het grensgeval.

12 **Gemiddelde kosten** 3 punten

a Stel voor contract A de formule op voor de gemiddelde kosten per pakket en bereken hoeveel pakketten minimaal nodig zijn om deze kosten hoogstens € 2,50 te maken.

13 **Tijd voor een route** 3 punten

a De routeafstand is 84 km. De bezorger rijdt gemiddeld 42 km/uur en stopt 36 keer, telkens gemiddeld 2,5 minuut. Bereken de totale routewerktijd in uren en minuten.

14 **De pakketvraag modelleren** 4 punten

a Het gemiddelde aantal aangevraagde pakketten per maand groeide van 360 op t = 0 naar 518,4 op t = 2, met t in jaren. Stel zowel een lineair als een exponentieel model op die door deze punten gaan.

15 **Een meetwaarde kiezen** 4 punten

a Bij t = 4 wordt een gemiddelde van 748 aangevraagde pakketten per maand gemeten. Bereken voor beide modellen het absolute verschil met deze meting en beoordeel welk model op dit punt beter past. Leg uit waarom dit nog geen definitieve modelkeuze is.

Een leverancier controleert verpakkingen

De inhoud van een verpakking is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 250 gram en standaardafwijking 3 gram. De machine-instelling is gedurende de metingen gelijk.

16 Een normale verdeling (3 punten)

a Schat met de normale vuistregels het percentage verpakkingen met minder dan 244 gram en het verwachte aantal daarvan bij 1600 verpakkingen.

17 Gemiddelden controleren (3 punten)

a In een onafhankelijke aselecte steekproef van 144 verpakkingen is het gemiddelde 249,5 gram en S=3 gram. Bereken het benaderende 95%-interval voor het populatiegemiddelde en beoordeel of 250 gram erin ligt.

18 Een klantenvergelijking (4 punten)

Tot en met	Slecht	Matig	Goed	Uitstekend
Groep A (%)	8	26	68	100
Groep B (%)	14	48	86	100

a Twee groepen van elk 200 klanten beoordelen de verpakking. De cumulatieve percentages staan in de tabel. Bereken maxVcp, classificeer het verschil en benoem welke groep positiever oordeelt.

19 Een verkeerd interval (3 punten)

a Een reclametekst beweert op basis van vraag 17 dat 95% van alle verpakkingen tussen 249 en 250 gram weegt. Leg precies uit waarom dat onjuist is en geef op basis van de normale verdeling een passend interval dat ongeveer 95% van de individuele inhouden omvat.

Een buurtfestival

Een festival verkoopt gewone tickets voor €12 en ondersteunerstickets voor €20. Er passen maximaal 300 bezoekers in de zaal. De organisatie wil minstens €4200 ticketopbrengst. Noem de aantallen gewone en ondersteunerstickets x en y.

20 **Een haalbaar plan (3 punten)**

a Stel de ongelijkheden op voor capaciteit en opbrengst, met de noodzakelijke voorwaarden voor x en y. Onderzoek of 180 gewone en 120 ondersteunerstickets voldoen.

21 **Zo weinig mogelijk ondersteunerstickets (3 punten)**

a De zaal is uitverkocht. Bereken het kleinste aantal ondersteunerstickets waarmee de opbrengst minstens €4200 is.

22 **Een kortingsactie (4 punten)**

a Alleen gewone tickets krijgen 10% korting. Er worden weer precies 300 tickets verkocht. Bereken het nieuwe minimale aantal ondersteunerstickets voor minstens €4200.

23 **Kennis van het publiek (4 punten)**

a Onder de 180 gewone ticketkopers zeggen 108 voor herhaling te zijn; onder 120 ondersteunersticketkopers zijn dat er 96. Bereken φ, classificeer het verschil en leg uit waarom hiermee geen oorzakelijk effect van een duurder ticket is aangetoond.

Formuleblad

Hulpmiddelen bij dit oefenexamen. De grenzen en formules volgen de syllabus wiskunde A havo 2027.

Verschil bij een 2×2-tabel

Gebruik de tabel met rijen (a,b) en (c,d).

$$\varphi = \frac{(ad - bc)}{\sqrt{((a+b)(c+d)(a+c)(b+d))}}.$$

$|\varphi| \leq 0{,}2$: gering. $0{,}2 < |\varphi| \leq 0{,}4$: middelmatig. $|\varphi| > 0{,}4$: groot.

Cumulatieve percentages

maxVcp is het grootste absolute verschil tussen twee cumulatieve percentages op dezelfde grens. De beslisregel geldt bij meer dan 100 waarnemingen per groep.

maxVcp≤20: gering. 20<maxVcp≤40: middelmatig. maxVcp>40: groot. De verschillen zijn in procentpunten.

Gemiddelden en standaardafwijkingen

$$E = |\text{gemiddelde 1} - \text{gemiddelde 2}| / \left(\frac{(S1+S2)}{2}\right).$$

$E \leq 0{,}4$: gering. $0{,}4 < E \leq 0{,}8$: middelmatig. $E > 0{,}8$: groot.

Boxplots

De box loopt van Q1 tot en met Q3. Boxen zonder overlap: groot verschil.

Boxen met overlap en minstens één mediaan buiten de andere box: middelmatig verschil. In de overige gevallen: gering verschil. Aanraking op een grenspunt telt als overlap.

Benaderende 95%-betrouwbaarheidsintervallen

Voor een populatieaandeel: $p \pm 2\sqrt{\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)}$. Hierbij is p het steekproefaandeel en n de steekproefomvang.

Voor een populatiegemiddelde: $\bar{x} \pm \frac{2S}{\sqrt{n}}$. Hierbij zijn $\bar{x}$ en S het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking.

Gebruik de formules bij een verdedigbare steekproef en wanneer de benadering bruikbaar is.

Normale vuistregels

Bij een ongeveer normale verdeling ligt ongeveer 68% binnen één standaardafwijking van het gemiddelde en ongeveer 95% binnen twee standaardafwijkingen. Ongeveer 99,7% ligt binnen drie standaardafwijkingen.

HELDER · EX-02

Wiskunde A · havo 5

Oefenexamen

23 vragen · 180 minuten · maximaal 76 punten

Dit is een oorspronkelijk oefenexamen bij HELDER. De contextgegevens zijn voor dit examen samengesteld.

Werk zelfstandig en laat berekeningen en redeneringen zien. Een los antwoord zonder gevraagde onderbouwing levert niet alle punten op.

Rond tussenuitkomsten niet voortijdig af. Gebruik de afronding die in de vraag staat of die de context vraagt.

Gebruik een schrift en een rekenmachine die je docent voor een examensimulatie toestaat. Het formuleblad staat achter de vragen. De voorbeelden en het beoordelingsmodel blijven tijdens de poging gesloten.

Een drinkwatersysteem

Een drinkwatersysteem bedient 240 huishoudens. Het gemiddelde verbruik is 108 liter per persoon per dag en een huishouden telt gemiddeld 2,3 personen. Gebruik voor een jaar 365 dagen.

1 **Jaarverbruik** 3 punten

a Bereken het totale jaarlijkse verbruik in kubieke meters. Rond af op hele kubieke meters.

2 **Een besparingsdoel** 3 punten

a Het aantal huishoudens groeit volgend jaar met 5%. Het aantal personen per huishouden blijft gelijk. Met hoeveel procent moet het verbruik per persoon dalen om het totale verbruik gelijk te houden?

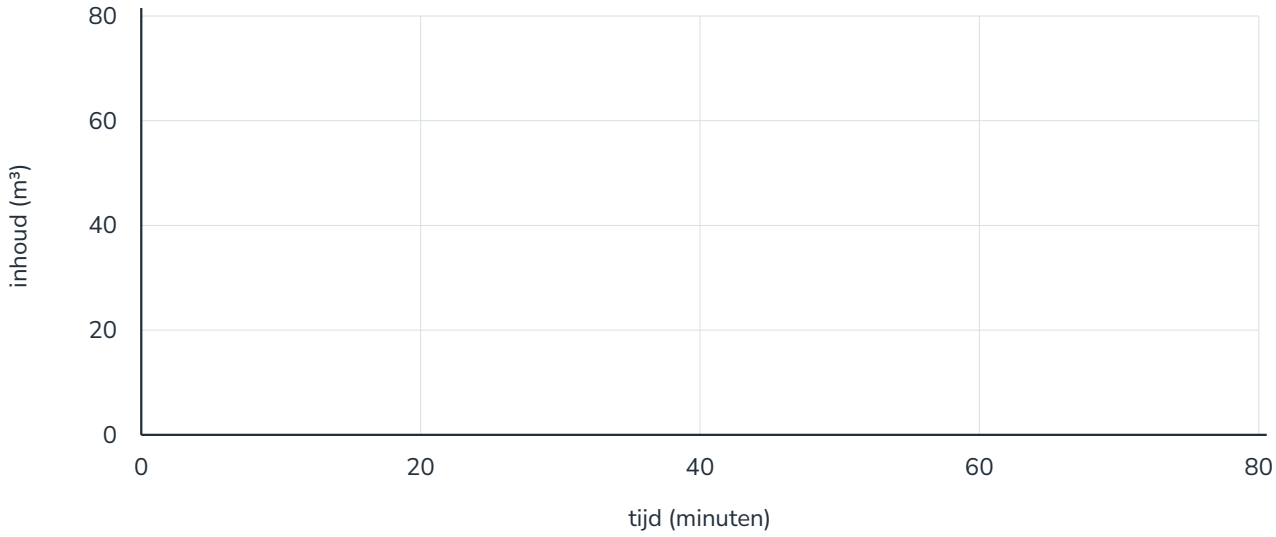
3 **Een reservoir** 3 punten

a Een reservoir bevat bij t = 0 18 m^3. Er stroomt 1,2 m^3 per minuut in en 0,45 m^3 per minuut uit. De capaciteit is 60 m^3. Stel een formule op en bereken na hoeveel minuten het reservoir vol is.

4 **Een sensorformule** 3 punten

a Een sensor gebruikt $V = 0{,}4(h - 5)^2$, met $h \geq 5$. Hier is V de inhoud in m^3 en h de aangegeven hoogte in decimeters, gemeten vanaf een vast referentiepunt. Maak h vrij en bereken h wanneer $V = 40$.

5 Een grafiek met een grens (4 punten)



a Teken op het rooster de inhoud van het reservoir uit vraag 3 voor $0 \leq t \leq 80$ als de toevoer bij 60 m^3 automatisch zo wordt verminderd dat instroom en uitstroom gelijk zijn. Licht het tweede grafiekdeel toe.

Een onderzoek naar deeltijdauto's

Een gemeente onderzoekt belangstelling voor deelauto's. Uit een passend inwonersregister wordt aselect een steekproef getrokken. Er zijn 625 bruikbare antwoorden, waarvan 275 positief. Veronderstel bij de intervalvragen dat de respons representatief is.

6 **Belangstelling schatten (3 punten)**

a Bereken een benaderend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aandeel inwoners met belangstelling.

7 **Een politieke uitspraak (3 punten)**

a Een raadslid zegt: "Hiermee is bewezen dat minder dan de helft van de inwoners belangstelling heeft." Beoordeel de formulering en geef een zorgvuldiger conclusie.

8 **Twee wijken (4 punten)**

a In een afzonderlijke steekproef uit wijk A zijn 84 van 120 inwoners positief; in wijk B zijn 54 van 180 positief. Bereken φ en classificeer het verschil.

9 **Een onvolledige vergelijking (3 punten)**

a Wijk A heeft minder eigen parkeerplaatsen en een jongere bevolking dan wijk B. Een artikel schrijft het gehele verschil in belangstelling toe aan de parkeerplaatsen. Leg uit waarom dit niet uit het onderzoek volgt en noem een gerichte aanvullende analyse.

10 **Omvang plannen (3 punten)**

a Bij een nieuwe peiling rekent men vooraf met $p=0{,}50$. Bereken het kleinste aantal bruikbare onafhankelijke antwoorden waarvoor de benaderende 95%-marge hoogstens 3 procentpunt is.

Een hergebruikbedrijf

Een bedrijf verhuurt kratten. In 2026 waren er 12 000 verhuurbeurten; in 2029 waren dat er 20 736. Men onderzoekt een model met een constant jaarlijks groeipercentage. Neem t=0 in 2026.

11 **Een model opstellen (3 punten)**

a Stel een exponentieel model op en bepaal het jaarlijkse groeipercentage.

12 **Een grens overschrijden (3 punten)**

a Het bedrijf kan maximaal 40 000 verhuurbeurten per jaar verwerken. Bepaal het eerste kalenderjaar waarin het model meer vraag voorspelt dan deze capaciteit.

13 **Een andere tijdseenheid (3 punten)**

a Schrijf hetzelfde model met m in maanden na het begin van 2026. Bereken de maandelijkse procentuele groei, afgerond op twee decimalen.

14 **Een lineair alternatief (4 punten)**

a Een medewerker gebruikt het lineaire model door de gegevens van 2026 en 2029. Bepaal dit model en bereken het verschil tussen de twee voorspellingen voor 2032.

15 **Een model beoordelen (3 punten)**

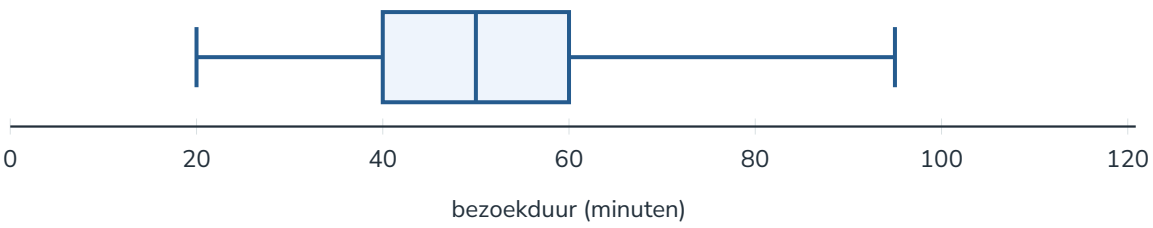
a De groeiverwachting is gebaseerd op uitbreiding naar drie nieuwe wijken tussen 2026 en 2029. Daarna zijn er voorlopig geen nieuwe wijken beschikbaar. Leg uit waarom dit informatie is die de keuze tussen de modellen beïnvloedt en stel een concrete controle voor.

Een sporthal vergelijkt twee groepen

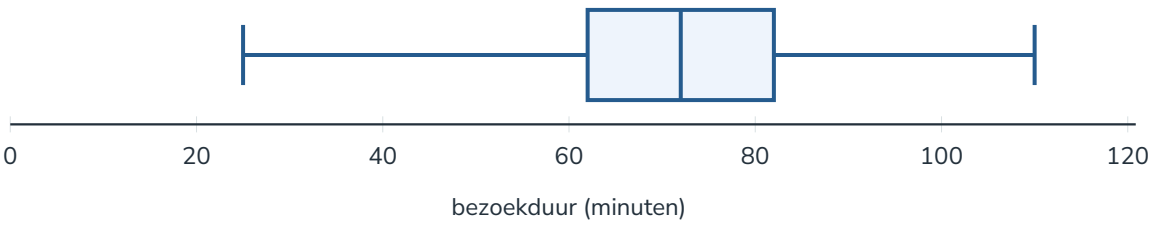
De sporthal meet de duur van bezoeken in minuten. De twee boxplots gebruiken dezelfde schaal. De groepen bestaan uit verschillende bezoekers. De boxplots geven de volledige minimum-maximumspanne weer.

16 Boxplots vergelijken (4 punten)

Groep A



Groep B



a Lees voor beide groepen de mediaan en kwartielafstand af. Classificeer vervolgens het verschil volgens de boxplotregels.

17 Een bewering over alle bezoekers (3 punten)

a Een trainer concludeert uit de boxplots: “Iedere bezoeker uit groep B blijft langer dan iedere bezoeker uit groep A.” Beoordeel dit met specifieke afgelezen waarden.

18 Een normaal verdeelde meting (3 punten)

a Voor een afzonderlijke grote bezoekersgroep is de bezoekduur bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 60 minuten en standaardafwijking 10 minuten. Schat het percentage bezoeken tussen 50 en 80 minuten.

19 Een gemiddelde met marge (3 punten)

a Bij 100 aselect gemeten bezoeken is het gemiddelde 62 minuten en S=12 minuten. Bereken een benaderend 95%-interval voor het populatiegemiddelde en leg uit wat er met de marge gebeurt als n wordt verviervoudigd en S gelijk blijft.

Een makersmarkt

Een organisator heeft 90 m^2 beschikbaar. Een kleine stand gebruikt 3 m^2 en kost de deelnemer €45; een grote stand gebruikt 6 m^2 en kost €75. Er is plaats voor maximaal 24 standhouders. Noem de aantallen kleine en grote stands x en y.

20 Voorwaarden vertalen (4 punten)

a Stel de ongelijkheden op en bepaal hoeveel grote stands maximaal naast 12 kleine stands passen.

21 Een opbrengstdoel (4 punten)

a De organisator wil precies 24 stands plaatsen en minstens €1260 ontvangen. Onderzoek of dit mogelijk is binnen de beschikbare oppervlakte.

22 Een andere prijs (3 punten)

a Door extra kosten moet de opbrengst bij hetzelfde plan uit vraag 21 minstens €1350 worden. De prijs van een grote stand blijft €75. Bereken de laagste prijs per kleine stand in hele euro's die aan dit doel voldoet.

23 Een kostenmodel controleren (4 punten)

a De kosten voor beveiliging zijn $K=180+4{,}5b$ euro, waarbij b het aantal bezoekers is. Een leerling maakt b vrij als $b=\frac{K}{4{,}5}-180$ en concludeert bij $K=990$ dat er 40 bezoekers waren. Herstel de formule, bereken het juiste aantal en geef een terugcontrole.

Formuleblad

Hulpmiddelen bij dit oefenexamen. De grenzen en formules volgen de syllabus wiskunde A havo 2027.

Verschil bij een 2×2-tabel

Gebruik de tabel met rijen (a,b) en (c,d).

$$\varphi = \frac{(ad - bc)}{\sqrt{((a+b)(c+d)(a+c)(b+d))}}.$$

$|\varphi| \leq 0{,}2$: gering. $0{,}2 < |\varphi| \leq 0{,}4$: middelmatig. $|\varphi| > 0{,}4$: groot.

Cumulatieve percentages

maxVcp is het grootste absolute verschil tussen twee cumulatieve percentages op dezelfde grens. De beslisregel geldt bij meer dan 100 waarnemingen per groep.

maxVcp≤20: gering. 20<maxVcp≤40: middelmatig. maxVcp>40: groot. De verschillen zijn in procentpunten.

Gemiddelden en standaardafwijkingen

$$E = |\text{gemiddelde 1} - \text{gemiddelde 2}| / \left(\frac{(S1+S2)}{2}\right).$$

$E \leq 0{,}4$: gering. $0{,}4 < E \leq 0{,}8$: middelmatig. $E > 0{,}8$: groot.

Boxplots

De box loopt van Q1 tot en met Q3. Boxen zonder overlap: groot verschil.

Boxen met overlap en minstens één mediaan buiten de andere box: middelmatig verschil. In de overige gevallen: gering verschil. Aanraking op een grenspunt telt als overlap.

Benaderende 95%-betrouwbaarheidsintervallen

Voor een populatieaandeel: $p \pm 2\sqrt{\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)}$. Hierbij is p het steekproefaandeel en n de steekproefomvang.

Voor een populatiegemiddelde: $\bar{x} \pm \frac{2S}{\sqrt{n}}$. Hierbij zijn $\bar{x}$ en S het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking.

Gebruik de formules bij een verdedigbare steekproef en wanneer de benadering bruikbaar is.

Normale vuistregels

Bij een ongeveer normale verdeling ligt ongeveer 68% binnen één standaardafwijking van het gemiddelde en ongeveer 95% binnen twee standaardafwijkingen. Ongeveer 99,7% ligt binnen drie standaardafwijkingen.